低水流量部の確率特性について

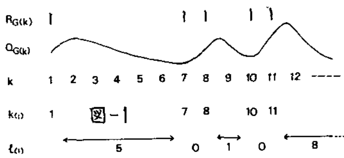
京都大学工学部　正員　池渕周一
新日本技術コンサルタント　正員　○古川整治

1．はじめに　著者らは統計的単位図法が長期間予測法として、とくに低水流量部の把握に対して有効であることをさまざまな具体例によって実証してきた[1]。本研究は低水流量部がほとんど地下水流出成分で占められていると考え、地下水流出モデルと入力系列の時間的特性とからシミュレーションを行い、低水流量部の確率的特性を把握しようとしたものである。

2．低水流量部のシミュレーションモデル　1)地下水流出系への入力R_G；降水のうち地下水流出系への入力成分となるものは、A层内土湿量変化を考慮すれば次のようになる。

$R_G(i)=f_c$ ； $S(i)>W_c$ ，0 ； $S(i)\leq W_c$ ……(1)　ここに$S(i)$はA层内土湿貯留量、f_cは最終浸透能、W_cは毛管飽和水量である。統計的単位図法では入力系列$R_G(i)$が求まると、次式で表わされる地下水流出の単位図から地下水流出量$Q_G(i)$が計算される。すなわち、

$h_G(\tau)=h_G(1)\cdot e^{-(\tau-1)\gamma}$ ----(2)、$Q_G(i)=\sum_{\tau=1}^{T_G}R_G(k-\tau)\cdot h_G(\tau)$ -----(3)　ここにγは地下水流出のてい減係数である。ここで入力R_Gの値は0またはf_cであるので、簡単のためその入力間隔lによって地下水流出量を表わすことを考える。2)入力間隔系列による地下水流出のシミュレーションモデル；さて地下水流出量系列を図－1のように入力間を1サイクルと考えると、そのてい減特性を利用してサイクル内の流出量を指数関数的に関係づけることができよう。すなわち、i番目のサイクル内最低流量を$Q_c(i)$とすると、そのサイクル内の他の流量$Q_{Gi}(j)$は次式で求められる。



図－1

$Q_{Gi}(j)=Q_c(i)\cdot e^{(l(i)-j+1)\gamma}$ ----(4)　またi番目のサイクル内最低流量$Q_c(i)$は、$(i-1)$番目のサイクル内最低流量$Q_c(i-1)$がさらに指数関数的にてい減した部分と、i番目のサイクルへの入力による増加分に分けて考えると、

$Q_c(i)=Q_c(i-1)\cdot e^{-\{l(i)+1\}\gamma}+f_c\cdot h_G(1)e^{-l(i)\gamma}$ -----(5)　と表わすことができる。この漸化式を初期条件$Q_c(0)=Q_0$とおいて解けば、

$Q_c(i)=Q_0\exp\left[-\left\{\sum_{k=2}^{i}l(k)+i-1\right\}\gamma\right]+f_c\cdot h_G(1)\sum_{k=2}^{i}\exp\left[-\left\{\sum_{j=k}^{i}l(j)+i-k-1\right\}\gamma\right]$ -----(6)　となり、iは十分大きく、(6)式の右辺第一項を近似的に0とすれば、初期条件によらず

$Q_c(i)=f_c h_G(1)\sum_{k=2}^{i}\exp\left[-\left\{\sum_{j=k}^{i}l(j)+i-k-1\right\}\gamma\right]$ ----(7)　とサイクル内の最低流量が入力間隔系列$l(i)$から求まることになる。3)入力間隔lの分布特性；一般に降水間隔日数は指数分布をするといわれているが、ここではA层による貯留効果を考慮して次のように考えた。いま、遷移確率行列$\{P_{ij}\}$を図－2のようにして$R_G(k)$の値は$R_G(k-1)$にのみ影響され、この行列は定常とする。そうすればlの確率分布は次式で表わされる。

図－2

$R_{G(k-1)}$ \ $R_{G(k)}$	f_c	0
f_c	P_{11}	P_{12}
0	P_{21}	P_{22}

$P(0)=P_{11}$，$P(l)=P_{12}P_{22}^{l-1}P_{21}$，$(l=1,2,3\cdots)$ ----(8)　(8)式は次のようにも表わすことができる。　$P(0)=a$，$P(l)=b\cdot e^{cl}$ $(l=1,2,\cdots)$ ---(9)　ここに$a=P_{11}$ $b=P_{11}\cdot P_{21}/P_{22}$，$c=\log P_{22}$である。図－3はこの分布形を由良川流域荒倉地点で

の実測値の分布にあてはめたものであり、合致は良好といえる。この分布特性にしたがってℓを発生させれば、(4),(7)式によって地下水流出量系列を求めることができるが、サイクル内最低流量系列Q_cは(5)式からマルコフ連鎖とも考えられるので、次にマルコフ過程として解析することを試みよう。4)サイクル内最低流量のマルコフ過程としての解析；(5)式はi番目のサイクル内最低流量$Q_c(i)$が、$Q_c(i-1)$と$\ell(i)$にのみ依存することを示している。ここで$\ell(i)$の確率分布が定常であれば、Q_cを各状態E_jに分割してその遷移確率行列$P=\{P_{jk}\}$を求めることができよう。すなわち、列ベクトル$\mathbb{P}(i)=\{P_k^{(i)}\}$を$i$番目のサイクルで$Q_c(i)$が各状態$E_k$にある確率分布、$\mathbb{P}_0=\{P_k^{(0)}\}$を初期分布とすれば、

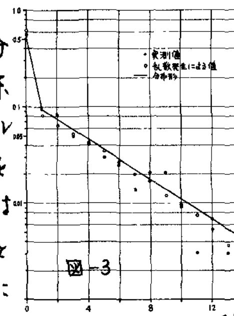


図-3

$\mathbb{P}(i)=P^i\cdot\mathbb{P}_0$ -----(10) であり、そして$\mathbb{P}_0$と独立に $\lim_{i\to\infty}\mathbb{P}(i)=\mathbb{P}=\{P_k\}$ ----(11) となる定常な極限分布があれば、$\mathbb{P}$は各状態E_kの確率分布と考えられる。このときP^iは$i\to\infty$で各行が全て$\mathbb{P}$に等しい確率行列となる。このP^iの構造を知るためにPのスペクトル分解を利用すると、

$P^i=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^i\cdot A_k$, $A_k=x_k\cdot y_k$ ----(12) となる[2)]。ここにλ_kはPの固有値, x_k y_kはそれぞれλ_kに対する右・左固有ベクトルである。したがって、$\mathbb{P}(i)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\lambda_j^i x_j$, $\alpha_j=y_j\cdot\mathbb{P}_0$ ----(13) であり、各$|\lambda_j|\leq 1$となることより、$i\to\infty$のときは、$\lambda_1=1$となるものだけを考えて、

$\mathbb{P}=\lim_{i\to\infty}\mathbb{P}(i)=\alpha_1 x_1$ -----(14) としてよい。

3．由良川流域への適用と考察　以上述べた低水流量部のシミュレーション法を由良川流域についておこなった。図-4はシミュレーション結果を対数正規確率紙上にプロットしたものであるが、これによるとサイクル内最低流量と低水流量部の分布特性はよく似た傾向を示している。このような場合には、サイクル内最低流量の確率分布はマルコフ過程として遷移確率行列Pの固有ベクトルから求められるので、近似的にその分布を低水流量の確率分布とすることもできよう。またシミュレーションによって得られた流量系列を1年分ごとに区切って、各区間の最小値として年最低流量を求めてみた。図-5は対数極値確率紙上にプロットしたものであるが、ほぼ直線状を示しており、*Gumbel* 分布をするといえよう。

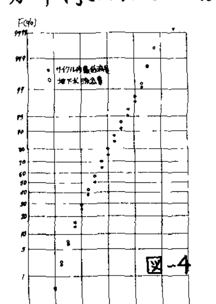


図-4

4．おわりに　水文量の極値的な値を予測する方法としては、従来から統計的方法が提案されているが、これらの方法は流量資料のみから流出特性を把握しようとしたものであり、多年にわたるデータがない場合には無理が生じる。本研究でのシミュレーションは統計的単位図法の地下水流出モデルを基礎とし、降水系列の特性を利用しているので、従来の方法と比較すると、統計的性状がより安定的にとらえられよう。なお、ここでは入力系列の特性を一定としたが、季節的変動などによる影響を考えることによって、より精度を高めることができよう。またマルコフ過程としての解析法はシミュレーションの手間が省けるという利点があるので、今後詳細な考察を進めるつもりである。

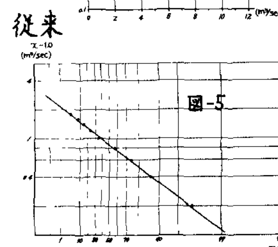


図-5

参考文献　1) 石原藤次郎・高棹琢馬・池渕周一；長期間流出解析法に関する2,3の考察，土木学会論文報告集196号，昭46年12月

2) バートレット著・津村善郎訳；確率過程論入門，東京大学出版会，昭43年8月