水資源計画における時間単位に関する研究（第2報）
――自己相関特性との関係――

大阪大学工学部　正員　室田　明
近畿大学理工学部　正員　江藤　剛治
大成建設　正員　○田中　剛

1．まえがき

水文量時系列の統計的特性は時間単位のとりかたによって変化し，そのとり扱いかたも必然的にかえなければならない。既往の多くの研究において，種々の時間単位に対して，水文量の統計的特性が調べられているが，筆者らは時間単位との関連から，それらを統一的に説明しようと試みている。参考文献[1)]において，筆者らは，水文量の確率分布をガンマ分布で近似することによって，水文量の確率分布が時間単位の変化とともにどのように変化するかを示した。一方，水文量の時系列特性についても時間単位との関係を明確にすることが必要である。本論文では水文量の各種時系列特性（従属性，周期性など）のうち自己相関特性と時間単位の関係について論じた。ここで得られた理論解は線形回帰1次マルコフ連鎖をなす時系列に対して十分適用できることがシミュレーションによって検証された。また従属な水文量時系列において，時間単位の変化に応じて確率水文量の強度がどのように変化するかを示す式を導き，従来用いられている経験的降雨強度曲線（DDA解析による）の理論的裏づけを行った。

2．時間単位と自己相関係数との関係

いま，従属な定常時系列を考えて，原系列の平均，分散をそれぞれμ，σ^2とすると，時間単位T_*で平均化された系列の平均μ_*，および分散σ_*^2は次のように導かれる。

$$\mu_* = \mu \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\sigma_*^2 = \frac{2\sigma^2}{T_*^2}\int_0^{T_*}(T_*-\tau)\,R(\tau)\,d\tau \quad \cdots\cdots (2)$$

ここに，$R(\tau)$：原系列の自己相関関数

また，この場合の遅れ（lag）T_*の共分散$Cov._*$は

$$Cov._* = \frac{\sigma^2}{T_*^2}\int_0^{T_*}\{\tau R(\tau) + (T_*-\tau)\,R(T_*+\tau)\}\,d\tau \quad \cdots\cdots (3)$$

これらの式の照査のために原系列が線形回帰1次マルコフ過程で離散的に表わしえる場合について考える。このとき $R(\tau)=\rho^{\tau}$ とおけて（ここに ρ は原系列の遅れが時間単位1の自己相関係数），（2）式，（3）式 は次のようになる。

$$\sigma_*^2=(\sigma^2/n^2)(n-2\rho-n\rho^2+2\rho^{n+1})/(1-\rho)^2 \quad \cdots\cdots (4)$$

$$Cov._*=(\sigma^2/n^2)\,\rho\,(1-2\rho^n+\rho^{2n})/(1-\rho)^2 \quad \cdots\cdots (5)$$

ここに， $n=T_*/\Delta t$ ， Δt ：原系列の時間単位

したがって，時間単位 $n\cdot\Delta t$ で平均化された系列の自己相関係数 ρ_* は

$$\rho_*=\frac{Cov_*}{\sigma_*^2}=\rho(1-2\rho^n+\rho^{2n})/(n-2\rho-n\rho^2+2\rho^{n+1}) \quad \cdots\cdots (6)$$

(6)式によって,自己相関係数 ρ をもつ，1次マルコフ連鎖をなす系列から時間単位を n 倍して平均化された系列の自己相関係数 ρ_* の理論値を得ることができる。（6）式のもつ意味をより詳細に考察すると，時間単位を n 倍にするということは原系列における n 個の観測値の平均値系列を得ることと同等の意味をもち，原系列のこまかい変動は平滑化され分散は小となるが，共分散はより小さくなり，n の増大につれて ρ_* は減少し，実用上独立とみなしえる系列に漸近する。Fig (1) は $\rho=0.8,\ 0.6,\ 0.4$ の場合についてシミュレーションによって得た ρ_*' と，（6）式より得られる ρ_* の比較の例を示したものである。シミュレーション結果と理論値とはほぼ一致しており (6)式は十分な精度をもつことがわかる。これより (1)～(3) 式の正当性が検証されたと言えよう。

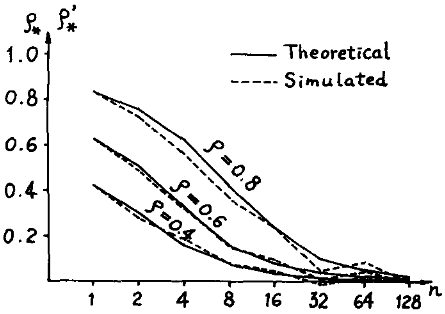

Fig. (1)

3．従属な水文量時系列における確率水文量と時間単位との関係について

ここでは水文量として降水量を例にとって，降雨強度曲線を理論的に誘導する手法を示す。最小時間単位に対する降水量 X^1（たとえば，最小時間単位を10分とすると10分雨量）の確率密度関数 $f(x^1, \alpha, \beta)$ はガンマ分布であらわされるとすると，return period T の降雨強度 x_T^1 は次式によって与えられる。ここに α，β はガンマ分布の形状母数，尺度母数である。

$$\left(1-\frac{1}{T}\right)=\int_{-\infty}^{x_0^1} f(x^1,\alpha,\beta)\ dx \qquad \cdots\cdots(7)$$

ここに，$f(x^1,\alpha,\beta)=(\beta^{\alpha}/\Gamma(\alpha))\cdot x^{1\,\alpha-1}\cdot e^{-\beta x^1}$，　$\Gamma(\alpha)$ ：ガンマ関数

$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} y^{\alpha-1}\cdot e^{-y}\,dy$，　ただし $x^1\geq 0$，$y\geq 0$

ここで X_i ($i=1,2,\cdots\cdots$) を従属な定常時系列とすると，降雨継続時間が最小時間単位のn倍の降水量 X ($=X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n$) の確率密度関数の近似解は $f(x,\alpha_*,\beta_*)$ と得られる[1]のでこの場合，return period T の降雨強度 x_0^n は次式によって得られる。

$$\left(1-\frac{1}{T}\right)=\int_{-\infty}^{x_0^n} f(x,\alpha_*,\beta_*)\ dx \qquad \cdots\cdots(8)$$

以上のようにして得られた x_0^n と n ($n=1,2,\cdots\cdots$) をプロットすることによって，return period T の理論的な降雨強度曲線を得ることができる。もちろん同様の手法により，最小時間単位に対する水文量の確率分布が確定すれば，任意の確率に対する任意の確率水文量の強度と時間単位の関係を理論的に導くことができる。Fig.(2) は Sharman の式と，x_0^n との比較の例を $\rho=0.8$, 0.4, 0.0 の場合について示したものである。ここに x_n ($n=1,2,\cdots$) は規準化して平均1，分散1として，return period は100として計算したものである。Sharman の式のよく合うと言われる数時間雨量については $\rho\fallingdotseq 0.3$ 程度とすれば，両者はほぼ完全に一致し，従来用いられている経験式の理論的裏づけを行うことができた。

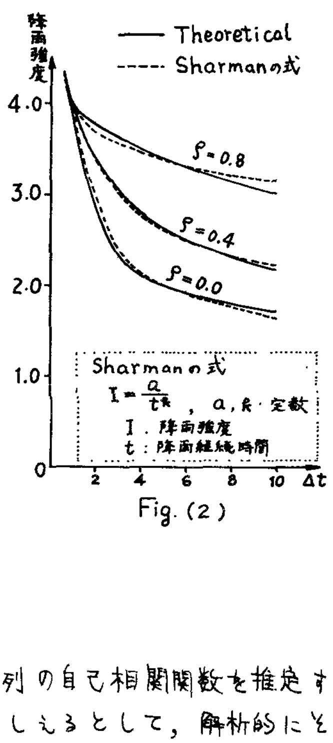

Fig. (2)

4. 流量時系列特性の検討

以上の理論を水文量時系列に適用するためには，対象時系列の自己相関関数を推定する必要がある。一般に水文量時系列は1次マルコフ過程で表わしうるとして，解析的にそのようなとりあつかいがなされている場合が多い。木津川実測半旬流量資料 (1918～1965) より得られる値と1次マルコフ過程を仮定して以上の理論から得られる結果との比較の例を示したものが Fig.(3) である。この図に見られるごとく両者はほとんど一致せず，流域変換系の複雑性を示していると言えよう。

参考文献　1) 室田，江藤，田中："水資源計画における時間単位に関する研究（第1報）── 水文資料の確率分布との関係 ──" 第27回年次学術講演会講演概要集第2部，昭和47年10月

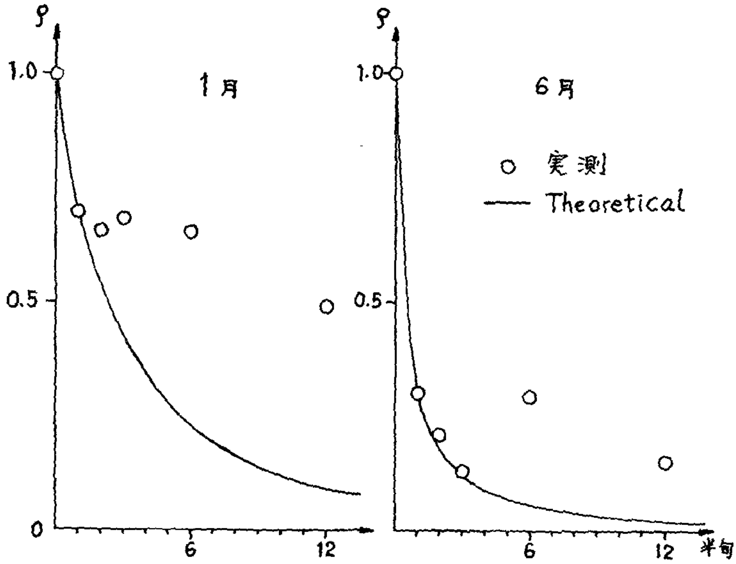

Fig. (3)