2次計画法による単位図計算

神戸大学工学部　正　員　○神吉和夫
神戸大学大学院　学生員　矢部泰久

1．まえがき

流出系を，降雨を入力，流出量を出力とする記憶を持つ線型系で表現できるのではないか，としたのがShermanの単位図(unit hydrograph)の発想であった。単位図を$h(\cdot)$とすると，時刻tの流出量$Q(t)$はその時刻以前の降雨量$R(\cdot)$により次式で与えられる。

$$Q(t)=\int_0^\infty h(\tau)\cdot R(t-\tau)d\tau \tag{1}$$

入出力を同一の尺度で量れば，連続性により

$$\int_0^\infty h(\tau)d\tau = 1.0 \tag{2}$$

また，物理的な意味から，単位図$h(\cdot)$は正値関数でなければならないので

$$h(\tau)\geqq 0 \tag{3}$$

単位図を既知の降雨・流出量資料から計算する手法が種々考えられている。その一つとしてEagleson，日野，高棹・池渕等は予測誤差の２乗平均最小基準をとるWienerの予測・沪波理論の適用を試みている。Eaglesonは，さらに，得られた単位図にまれに物理的に不合理な負値の生じることを指摘し，LP(Linear Programming)による正値の単位図を求める手法を定式化している。ここでは，正値の単位図を得る一手法として，２次計画法(Quadratic Programming)による定式化を行ない，またこのような解析の持つ意味を検討することにする。

2．最小２乗法による単位図計算

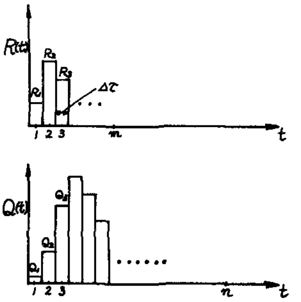
Eaglesonにならつて，図－１に示す分離された一組の入出力資料について考えるが，本来は長期の系列資料が望ましい。(1)式を差分化し，誤差ベクトル$\mathbb{U}$を導入すると，データについて

$$\mathbb{Y}=\mathbb{X}\mathbb{H}+\mathbb{U} \tag{4}$$

同様に，(2)．(3)式を差分化して

$$\mathbb{H}^T\mathbb{1}=1.0 \tag{5}$$

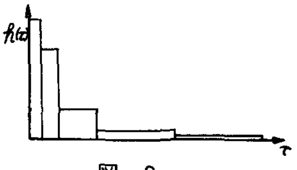
$$\mathbb{H}\geqq\mathbb{0} \tag{6}$$



図－1

ここで

$$\underset{n\times1}{\mathbb{Y}}=\begin{pmatrix}Q_1\\Q_2\\\vdots\\Q_n\end{pmatrix}\quad \underset{(\ell+1)\times1}{\mathbb{H}}=\begin{pmatrix}h_0\Delta\tau\\h_1\Delta\tau\\\vdots\\h_\ell\Delta\tau\end{pmatrix}\quad \underset{n\times(\ell+1)}{\mathbb{X}}=\begin{pmatrix}R_1 & & & \mathbb{0}\\R_2 & R_1 & & \\\vdots & \vdots & \ddots & \\R_m & R_{m-1} & & R_1\\ & R_m & & \vdots\\\mathbb{0} & & \ddots & R_m\end{pmatrix}\quad \underset{n\times1}{\mathbb{U}}=\begin{pmatrix}U_1\\U_2\\\vdots\\U_n\end{pmatrix}\quad \underset{(\ell+1)\times1}{\mathbb{1}}=\begin{pmatrix}1.0\\1.0\\\vdots\\1.0\end{pmatrix} \tag{7}$$



図－2

$[\ ]^T$は転置行列，後出の$[\ ]^{-1}$は逆行列を示す。$\Delta\tau$は離散化する時間間隔で応答の鋭敏性を考慮して適当に決めなければならない。Snyderは単位図のきざみを一様とせず，図－２のようにBlock化を行ない，最終の連立一次方程式の元の減少をはかった。m，n，ℓはそ

れぞれ入力，出力，単位図の長さを示す。単位図の長さ ℓ は，長期の資料を用いる場合には適当に仮定する必要があるが，図－１のような短期の場合は $\ell = n - m$ として良いであろう。さて，最小２乗法では

$$J(\mathbb{H}) = \frac{1}{n}\mathbb{U}^T\mathbb{U} \qquad (8)$$

を最小にする $\mathbb{H}$ を求める。(8)式に(4)式を代入し展開すると

$$J(\mathbb{H}) = \frac{1}{n}(\mathbb{Y}-\mathbb{X}\mathbb{H})^T(\mathbb{Y}-\mathbb{X}\mathbb{H}) = \frac{1}{n}(\mathbb{Y}^T\mathbb{Y} - 2\mathbb{H}^T\mathbb{X}^T\mathbb{Y} + \mathbb{H}^T\mathbb{X}^T\mathbb{X}\mathbb{H})$$

$\partial J(\mathbb{H})/\partial\mathbb{H} = \mathbb{0}$ より

$$\frac{1}{n}\mathbb{X}^T\mathbb{X}\mathbb{H} = \frac{1}{n}\mathbb{X}^T\mathbb{Y} \qquad (9)$$

この(9)式は *Wiener-Hoph eq.* の離散形と対応すると考えられる。その解は

$$\mathbb{H} = (\mathbb{X}^T\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}^T\mathbb{Y} \qquad (10)$$

(10)式により得られる単位図が(3)式の条件を必らずしも満さないことは明らかであろう。

３．２次計画法による単位図計算

正値の単位図を得るため，(5)(6)式を制約条件として考慮し，誤差の２乗平均最小化を考える。(8)式を $\mathbb{H}$ に関して最小化することは

$$J'(\mathbb{H}) = \mathbb{H}^T\mathbb{X}^T\mathbb{Y} - \frac{1}{2}\mathbb{H}^T\mathbb{X}^T\mathbb{X}\mathbb{H} \qquad (11)$$

を最大化することと等価であるから，問題は

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{H}^T\mathbb{1} = 1.0 \\ \mathbb{H} \geqq \mathbb{0} \\ J'(\mathbb{H}) = \mathbb{H}^T\mathbb{X}^T\mathbb{Y} - \frac{1}{2}\mathbb{H}^T\mathbb{X}^T\mathbb{X}\mathbb{H} \longrightarrow max \end{array}\right\} \qquad (12)$$

となる $\mathbb{H}$ を求めることと定式化される。ここで，マトリックス$(\mathbb{X}^T\mathbb{X})$は対称行列であり，また正定値と考えられるから，(12)式で与えられる問題は典型的なQP問題となっている。QP問題の解法は *Wolfe* 等によりＬＰ問題に帰着させる手法が開発されている。計算例，結果を講演時に発表する。

４．考察

正値関数の単位図を求める試みは新らしいものではない。*Nash* のモデルとか流出関数がそれに当たる。それらは，流出系の線型性を自明なものとして，系をより単純な数式で表現しようとしたものである。QPによる単位図計算は *a priori* になめらかな関数を仮定せず，数値的に計算する手法と言える。しかし，統計的な面から見れば，最小２乗法により有意な負値を持つ単位図が生じるなら，その原因を考える必要がある。もし，データ，推定方式に問題が無いなら，モデル自体，すなわち線型仮定を再検討すべきであろう。したがって，QPによる単位図計算法は最小２乗法によるそれに替わるものではなく，単位図の計算手法の一つと考えられる。

最後に，本研究にあたり，神戸大学松梨順三郎教授・昭和設計清水進氏に有益な御討議をいただいたことを記し，感謝の意を表する。

参考文献　1). 本間・石原編：応用水理学下Ⅱ，丸善，昭和46年．2) P.S.Eagleson et al : *Computation of Optimum Realizable Unit Hydrographs*, Water Res.Res. vol.2. No.4, 1966.
3) G.Hadley : *Nonlinear and Dynamic Programming*, Addison-Wesley Pub.Co., 1964.