非比例減衰項の応答に及ぼす影響について

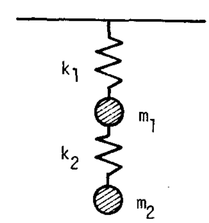
京都大學工學部　正員　山田善一
同上　正員　河野健二
建設省　正員　○藤本保

1. まえがき

構造物の設計において，最近動的解析が非常に重要になってきたが，問題となる振幅の絶対値を大きく支配する減衰は，材料の減衰特性もまだ明らかにされておらず，周囲の条件にも影響されるので，定式化されてはいない。そこで，一般に取り扱いに便利なように，比例減衰と仮定して解析しているが，減衰によるモード連成が生じるような系に対しては，非比例減衰となり，複素固有値問題となる。この場合，解析が複雑になり計算機の容量ばかりでなく，計算時間も増大することとなる。

そこで，モード連成を生じるような系において，減衰マトリックスの連成項の応答に及ぼす影響を考え，その連成項が無視できるのかどうか。また，無視できないときには，近似的に非連成の系にできないかを考察した。その際，単に数値上だけでなく，解析的にも研究できるように，Fig-1に示すような2自由度系を選んだ。

2. 応答に及ぼす影響



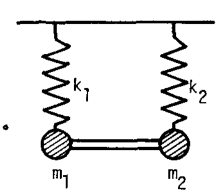


Fig. - 1

減衰マトリックスの連成項の影響を明確にするために，一般化座標上での運動方程式を、非対角項を考慮する場合と無視する場合の2つについて考えることにする。

(1) $$[I]\{\ddot{y}\} + [\tilde{C}]\{\dot{y}\} + [\diagdown\omega_i^2\diagdown]\{y\} = \{\tilde{f}\}$$

(2) $$[I]\{\ddot{y}\} + [\diagdown\tilde{C}_{ii}\diagdown]\{\dot{y}\} + [\diagdown\omega_i^2\diagdown]\{y\} = \{\tilde{f}\}$$

減衰マトリックスの非対角項が，減衰定数や減衰固有振動数に及ぼす影響は，(1)式の振動数方程式の解 λ を，(2)式の振動数方程式の解 λ_0 について Tayler 展開することによって，考察することができる。

次に応答に及ぼす影響は，減衰自由振動によって考えることができる。

(2)式の解は

(3) $$y_j(t) = e^{-\tilde{h}_j(t)}\left\{ y_{j0}\cos\tilde{\omega}_{d_j}t + \left(\frac{\dot{y}_{j0} + \tilde{h}_j\omega_j y_{j0}}{\tilde{\omega}_{d_j}}\right)\sin\tilde{\omega}_{d_j}t \right\} \qquad (j=1,2)$$

また (1)式の解は，

(4) $$y_j(t) = \sum_{k=1,4} A_{jk}\, e^{\lambda_k t} \qquad \lambda_k：複素数 \qquad (j=1,2)$$

で与えられ，A_{jk} は振動数方程式より，

(5) $$A_{21} = g_1 A_{11},\quad A_{22} = \bar{g}_1 A_{12},\quad A_{13} = g_2 A_{23},\quad A_{14} = \bar{g}_2 A_{24} \quad (A_{jk}, g_j：複素数)$$

(6) $$g_i = -\frac{\lambda_i^2 + \tilde{C}_{ii}\lambda_i + \omega_i^2}{\tilde{C}_{21}\lambda_i} \qquad (i=1,2)$$

であり，$g_i \cong 0$ であるならば，非対角項は無視できると言える。

3. 等価非連成系

非対角項が無視できない場合，2次の統計量を等価にすることによって，非連成系を作ることを考える。つまり外力に white noise を仮定し，連成系の二次の期待値を求め，それ

を、非連成系に代入することによって、等価な減衰マトリックスと剛性マトリックスが求められる。

$$C_i' = E\{\tilde{f}_i \dot{y}_i\} / E\{\dot{y}_i^2\} \quad , \quad \omega_i'^2 = \left(E\{\dot{y}_i^2\} + E\{\tilde{f}_i y_i\}\right) / E\{y_i^2\} \tag{7}$$

ここで $E\{\dot{y}_i^2\}$，$E\{y_i^2\}$ は留数積分によって求めることができる。また

$$E\{\tilde{f}_i \dot{y}_i\} = \pi S_0 \quad , \quad E\{f_i y_i\} = 0$$

である。

4. 結果とその考察

i) 減衰マトリックスの連成項を無視できるかどうかは、厳密には、複素固有値と複素モードが、無視した場合のそれらで十分近似できるかどうかによって判断される。

ii) i)の判断では、一度複素固有値を求めねばならず意味がないと思われる。そこで、固有振動数比を判定条件とするが、計算結果は必ずしも、その比だけではないことを示している。しかしながら、それは一応の判定基準になるであろう。具体的には、減衰定数の大きさ及び差にもよるが、おおよそ、固有振動数の比が2倍以上であるならば、無視できるであろう。またその差がそれほど大きくない場合は 1.5 倍以上、共に 10% より小さい場合は 1.3 倍以上であるならば無視できると思われる。

iii) 修正震度法が用いられる場合には、減衰マトリックスをどのように与えても非対角項を無視できるであろう。

iv) そこで、物理的な振動数接近の条件が必要となるが、質量と剛性が大きな部分と小さな部分とから成る系、または、剛性マトリックスが、対角ブロック行列に近いような系には、必ずしも接近するわけではないが、注意を要する。

v) Tayler 展開による修正は、複素固有値が一致するだけで、モードが異なるので、正しい近似とは言えないであろう。

vi) 等価非連成系を容易に得るには、外力に white noise を適用するのが最も良いと思われるが、これは定常状態であるため、過渡振動に対しては多小の誤差を免がれない。もちろん外力を地震のようなものや、Impulse を考えれば、もっと良く一致すると思われるが、その計算のために、等価非連成系にする目的が失なわれるであろう。この場合も、おそらくモード解析は適用できず、直接応答計算する必要があるだろう。

vii) 等価非連成系の誤差の評価、つまり誤差の上界、下界が求められれば、より有用であると思われるが、その誤差の評価ができない限り、一般化座標上で直接応答を求めても、それほど困難ではないので、こちらの方が良いであろう。

viii) 多自由度系への適用は、その系が2つの大きな部分に分けられるのであるならば、これらの結果が有効であると思われる。

参考文献

1) 山田善一、後藤洋三、"長大つり橋主塔橋脚の振動特性と地震応答の解析に関する諸考察" 土木学会論文報告集, No.207, pp1~12, 1972.11

2) Takemia, H., "Studies on the Application of Random Vibration Theory to Earthquake-Resistant Design of Civil Engineering Structures," Kyoto Uni. Doctral Dissertation, 1973