

## 信頼性を制約条件とする最適設計

京都大学工学部 正員 山田 善一  
 京都大学大学院 学生員 小山 健  
 日本鉄道建設公団 正員 高田 正治

1. まえがき 構造物が安全性と経済性という相反的要因をほど良く調和しているように設計することは重要な課題である。ここではラーメン鋼構造物が静的荷重を受ける場合について構造物を構成する各はり要素が持つ破壊確率に制約をつけて、その総重量を目的関数とし、要素断面積を設計変数として、最小重量設計をこころみ、そのための計画手法として、Dobbs Felton<sup>(1)</sup>による Alternate step method を応用した結果を報告する。

2. 確率密度関数について、荷重および強度のみを変動性をもつ変数として取り扱う。一般に荷重および強度の分布は多くのデータをもとにして、その分布形状を決定することは必要であるが、分布形状により破壊確率が $10^{-3}$ 以下になるときは分布の尾部の影響が大きくあらわれる。しかしデータは中心領域に限られることが多く尾部を正確に判断することは非常に困難である。ここでは便宜的に荷重・強度ともに正規分布と仮定する。

### 3. 最適化のための諸式

3-1 目的関数  $W = \sum_{i=1}^n \rho_i A_i l_i$  ここで  $W$ : 総重量,  $\rho_i$ : 第  $i$  要素単位体積重量  
 $A_i$ : 断面積,  $l_i$ : 長さ,  $n$ : 設計変数総数

3-2 制約条件 許容破壊確率の概念を用いる。第  $i$  要素の強度を  $\sigma_i$ , 応力を  $f_i$  とすると、各要素に対する制約条件式は、 $P_f(\sigma_i < f_i) \leq P_{fi}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) とする。

3-3 最適化手法 詳細は前述の参考文献により省略するが、constant weight 面上を歩む。いわゆる side step vector を求定するための感度係数  $R_{fi}$  について述べておく。

第  $i$  要素の破壊確率および制約破壊確率はそれぞれ  $P_{fi} = \alpha \times 10^{-a}$ ,  $P_{fi} = \beta \times 10^{-b}$  ( $0 < \alpha, \beta < 1$ ,  $a, b > 0$ ) で表わされることにより  $R_{fi} = b/a$  または  $R_{fi} = 1/10^{(b-a)}$  の値を用いる。

4. 要素破壊確率  $P_{fi}$  荷重とそれにより生じる要素応力は線形関係をもつものがあるから要素応力は荷重と同じ変動係数をもつものと考えられる。したがって2種以上の荷重が同時に作用するものもあり、また交互に作用するものもある場合には次のように考えて要素応力の平均値、分散値を算出する。同時に作用する荷重が  $m$  個あるとき第  $i$  荷重により第  $j$  要素に生じる四角モーメント、軸力を  $M_{ij}$ ,  $N_{ij}$ , 断面係数を  $W_i$  とすると、応力  $f_{ij}$  は、 $f_{ij, \max} = |M_{ij, \max}/W_i| + N_{ij}/A_i$ ,  $f_{ij, \min} = -|M_{ij, \max}/W_i| + N_{ij}/A_i$  となり、 $(\bar{f}_{ij, \max}, \sigma_{f_{ij, \max}})$ ,  $(\bar{f}_{ij, \min}, \sigma_{f_{ij, \min}})$  が求まる。ここで  $(\bar{f}, \sigma_f)$  は、正規分布の平均値  $(\bar{f})$ , 標準偏差  $(\sigma_f)$  を示している。これより全同時荷重による応力の平均値、標準偏差は、

$$\bar{f}_i, \max = \sum_{j=1}^m \bar{f}_{ij, \max}, \quad \sigma_{f_i, \max} = \left\{ \sum_{j=1}^m \sigma_{f_{ij, \max}}^2 \right\}^{1/2}$$

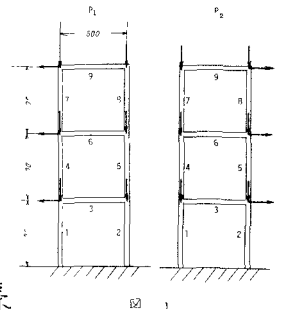
$$\bar{f}_i, \min = \sum_{j=1}^m \bar{f}_{ij, \min}, \quad \sigma_{f_i, \min} = \left\{ \sum_{j=1}^m \sigma_{f_{ij, \min}}^2 \right\}^{1/2} \quad \text{と} \quad \text{し} \quad \text{る}.$$

引張り、圧縮強度分布を  $(\bar{\sigma}_+, \sigma_{\sigma+})$ ,  $(-\bar{\sigma}_-, \sigma_{\sigma-})$ ,  $\phi(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_w^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt$   
 $w_+ = |\bar{\sigma}_+ - \bar{f}_{i \max}| / \sqrt{\sigma_{\sigma+}^2 + \sigma_{f_{i \max}}^2}$ ,  $w_- = |-\bar{\sigma}_- - \bar{f}_{i \min}| / \sqrt{\sigma_{\sigma-}^2 + \sigma_{f_{i \min}}^2}$  とすると第  $i$  要素の破壊確率は、

- (i)  $\bar{f}_{i \max} > 0$ ,  $\bar{f}_{i \min} < 0$  のとき  $P_{fi1} = \phi(w_+)$ ,  $P_{fi2} = \phi(w_-)$  より  $P_{fi} = P_{fi1} + P_{fi2}$   
 (ii)  $\bar{f}_{i \max} > 0$ ,  $\bar{f}_{i \min} > 0$  のとき  $P_{fi} = P_{fi1}$   
 (iii)  $\bar{f}_{i \max} < 0$ ,  $\bar{f}_{i \min} < 0$  のとき  $P_{fi} = P_{fi2}$

以上のように同時に作用する荷重による破壊確率を、各交互荷重群について求めて、その中で最大の破壊確率を与えるものを  $i$  要素がもつ破壊確率であると考えてそれを制約条件に照らし合わせることにする。

5 荷重 図1に示す同時荷重より構成される交互荷重群  $P_1, P_2$  を考える。各矢印は 5 ton を示す。はり要素はすべて厚さ 2 cm の円筒形状をもち、断面積のみが変化する。

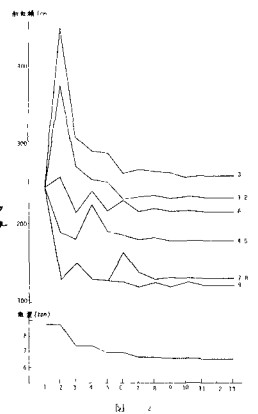


6. 計算例 制約破壊確率は  $P_{fi} = 0.37 \times 10^{-6}$  ( $i=1, 2, \dots, 9$ ) とする。荷重  $P_1, P_2$  の対称性より要素 1 と 2, 4 と 5, 7 と 8 の断面積は、等しくなる。簡単のため荷重の変動係数  $\gamma_p = P/\bar{p}$  はすべて等しく、また鋼材強度も画一であると考えた。したがって  $\gamma_\sigma = \sigma/\bar{\sigma}_0$  も各要素について同一となる。 $\gamma_p, \gamma_\sigma$  の変化による設計変数の変化をみよ。例①②③について計算した。例①については、Iteration による設計変数、目的関数の変化を、各例について最終解における各要素がもつ荷重  $P_1$  による応力の平均値(最大値, 最小値)および、最終的要素破壊確率を示す。

- 例①  $\gamma_p = 0.100$   $\gamma_\sigma = 0.100$  図2 表1  $W = 6.54 \text{ ton}$   
 ②  $\gamma_p = 0.000$   $\gamma_\sigma = 0.100$  表2  $W = 6.22 \text{ ton}$   
 ③  $\gamma_p = 0.100$   $\gamma_\sigma = 0.000$  表3  $W = 5.38 \text{ ton}$

なお  $P_i = 7.85 \text{ t/cm}^2$  で各表の単位は、 $\text{kg-cm}$  である。

7. 結論 最終的にみるときすべての要素が制約値に達しているわけではな。したが、(全応力という概念に対応する)全破壊



という状態が最適解とならなことを示している。これは計画法に与える収束条件をかえてみても以上動かなかったのて、単に計画法による収束性の不十分を原因とするのではなく、破壊確率を制約とした場合の特性であると思われる。また、 $\gamma_\sigma, \gamma_p$  の変化については、 $\gamma_\sigma$  の方が大きく影響していることが各表より結論しう。

表1

| 要素番号 | 最大応力 | 最小応力  | 破壊確率                 | 断面積   |
|------|------|-------|----------------------|-------|
| 1    | 945  | -1258 | $3.5 \times 10^{-7}$ | 239.9 |
| 2    | 1259 | -1173 | $3.5 \times 10^{-7}$ | 239.9 |
| 3    | 1117 | -1093 | $3.2 \times 10^{-7}$ | 259.1 |
| 4    | 992  | -1218 | $3.4 \times 10^{-7}$ | 176.4 |
| 5    | 1105 | -1106 | $1.4 \times 10^{-7}$ | 176.4 |
| 6    | 1116 | -1094 | $3.4 \times 10^{-7}$ | 213.1 |
| 7    | 1049 | -1161 | $3.7 \times 10^{-7}$ | 128.1 |
| 8    | 1063 | -1126 | $3.7 \times 10^{-7}$ | 128.1 |
| 9    | 1118 | -1077 | $3.2 \times 10^{-7}$ | 170.0 |

表2

| 要素番号 | 最大応力 | 最小応力  | 破壊確率                 | 断面積   |
|------|------|-------|----------------------|-------|
| 1    | 1056 | -1306 | $3.5 \times 10^{-7}$ | 219.5 |
| 2    | 1247 | -1191 | $3.5 \times 10^{-7}$ | 219.5 |
| 3    | 1231 | -1213 | $1.2 \times 10^{-7}$ | 246.5 |
| 4    | 1106 | -1342 | $3.2 \times 10^{-7}$ | 167.9 |
| 5    | 1224 | -1276 | $3.4 \times 10^{-7}$ | 167.9 |
| 6    | 1236 | -1211 | $3.4 \times 10^{-7}$ | 202.7 |
| 7    | 1165 | -1284 | $3.7 \times 10^{-7}$ | 122.9 |
| 8    | 1202 | -1246 | $3.7 \times 10^{-7}$ | 122.9 |
| 9    | 1239 | -1195 | $3.2 \times 10^{-7}$ | 114.2 |

表3

| 要素番号 | 最大応力 | 最小応力  | 破壊確率                 | 断面積   |
|------|------|-------|----------------------|-------|
| 1    | 1450 | -1830 | $3.5 \times 10^{-7}$ | 190.1 |
| 2    | 1670 | -1606 | $3.5 \times 10^{-7}$ | 190.1 |
| 3    | 1663 | -1640 | $3.2 \times 10^{-7}$ | 212.6 |
| 4    | 1519 | -1793 | $3.5 \times 10^{-7}$ | 144.9 |
| 5    | 1656 | -1657 | $3.5 \times 10^{-7}$ | 144.9 |
| 6    | 1667 | -1638 | $3.7 \times 10^{-7}$ | 175.2 |
| 7    | 1572 | -1709 | $2.9 \times 10^{-7}$ | 106.7 |
| 8    | 1615 | -1666 | $2.9 \times 10^{-7}$ | 106.7 |
| 9    | 1670 | -1620 | $3.7 \times 10^{-7}$ | 98.8  |

参考文献 (1) Detho, M.W. and Felton, L.P. "Optimization of Truss Geometry" Proc. of A.S.C.E., Vol. 75, No. ST 10, Oct. 1967 pp2105~2118