骨組構造物の安定解析法へのグラフ理論の適用

京都大学工学部　正員　工博　小西一郎
京都大学工学部　正員　工博　白石成人
京都大学工学部　正員　工修○谷口健男

1．まえがき

骨組構造物の線形解析法は，骨組により構成されるネットワークのもつ位相幾何学的特性を用いて　すでに確立されている。その基礎となるのは，グラフ理論であり，ネットワークの構成要素である全ての部材に任意に方向を与えた有向グラフを用いている。しかしながら，曲げにおよぼす軸力の影響を考慮した非線形剛性行列を用いて，平面骨組系を非線形解析をする場合[1]，線形剛性行列に安定関数が付属した形となり，線形解析において用いられた有向グラフの適用には，その非線形性状より困難を生じる。

本研究においては，グラフ理論において定義される他のグラフ，すなわち無向グラフ，および定向グラフの概念を用いて，非線形解析における骨組系全体の基礎式を導く。

2．単一部材の剛性行列と系全体の剛性行列[1]

骨組を構成する一部材（i部材）の一端をI，他端をFとし　部材軸と部材固有座標系の一軸を一致させると，材端力S_iと材端変形量δ_iとの間において，

$$\begin{Bmatrix} {}_{I}S_i \\ {}_{F}S_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_{II}k_i & {}_{IF}k_i \\ {}_{FI}k_i & {}_{FF}k_i \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} {}_{I}\delta_i \\ {}_{F}\delta_i \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots ①$$

$${}_{II}k_i = \begin{bmatrix} EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 12EI\psi_5/l^3 & 6EI\psi_2/l^2 \\ 0 & 6EI\psi_2/l^2 & 4EI\psi_3/l \end{bmatrix}_i, \quad {}_{IF}k_i = \begin{bmatrix} -EA/l & 0 & 0 \\ 0 & -12EI\psi_5/l^3 & 6EI\psi_2/l^2 \\ 0 & -6EI\psi_2/l^2 & 2EI\psi_4/l \end{bmatrix}_i$$

$${}_{FI}k_i = \begin{bmatrix} -EA/l & 0 & 0 \\ 0 & -12EI\psi_5/l^3 & -6EI\psi_2/l^2 \\ 0 & 6EI\psi_2/l^2 & 2EI\psi_4/l \end{bmatrix}_i, \quad {}_{FF}k_i = \begin{bmatrix} EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 12EI\psi_5/l^3 & -6EI\psi_2/l^2 \\ 0 & -6EI\psi_2/l^2 & 4EI\psi_3/l \end{bmatrix}_i$$

①式を系全体座標系に変換すると

$$\begin{Bmatrix} {}_{I}\tilde{S}_i \\ {}_{F}\tilde{S}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_{II}\tilde{k}_i & {}_{IF}\tilde{k}_i \\ {}_{FI}\tilde{k}_i & {}_{FF}\tilde{k}_i \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} {}_{I}\tilde{\delta}_i \\ {}_{F}\tilde{\delta}_i \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots ②$$

i部材の両端をP点，A点とし，点Aには，i, j, kの3部材が接合しているとすれば，

$${}_{F}\tilde{\delta}_i = {}_{I}\tilde{\delta}_j = {}_{I}\tilde{\delta}_k = \tilde{u}_A \quad ;\ \text{適合条件} \quad \cdots\cdots ③$$

$${}_{F}\tilde{S}_i + {}_{I}\tilde{S}_j + {}_{I}\tilde{S}_k = \tilde{P}_A \quad ;\ \text{つり合い条件} \quad \cdots\cdots ④$$

の2式を用いると

$$\tilde{P}_A = [{}_{FF}\tilde{k}_i + {}_{II}\tilde{k}_j + {}_{II}\tilde{k}_k] \cdot \tilde{u}_A + {}_{FI}\tilde{k}_i \cdot \tilde{u}_P + {}_{IF}\tilde{k}_j \cdot \tilde{u}_Q + {}_{IF}\tilde{k}_k \cdot \tilde{u}_R \quad \cdots\cdots ⑤$$

⑤式の操作を全節点について行なえば，系全体について，

$$\tilde{P} = \tilde{K} \cdot \tilde{u} \quad / \text{or} \quad \tilde{u} = [\tilde{K}]^{-1} \tilde{P} \quad \cdots\cdots ⑥$$

3．グラフ理論の適用

3－1．無向グラフの概念を用いた場合

無向グラフとは　各部材に方向性を与えないもの，すなわち有向グラフの方向性を除いたものに一致する。ここでは特に，節点と両材端との間の接続を表わすものを用い，次のような接続行列Aを定義する。

$$A = \begin{cases} a_{ij} = 1 & ;\ i\text{部材端が}j\text{節点に接続する場合} \\ a_{ij} = 0 & ;\ i\text{部材端が}j\text{節点に接続しない場合} \end{cases}$$

従来と同様に、接地点は datum node, E, として節点番号を与えなければ

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad \text{or} \quad 0 \quad \cdots\cdots\cdots ⑦ \qquad \text{ここで} \quad n\text{；節点数}$$

構造解析に、この行列Aを適用する場合、1，0を各々(3×3)の大きさの I，$\mathbf{0}$ に拡大する。

この拡大されたA行列を用いると、節点外力 $\tilde{P}$ と材端力 $\tilde{S}$ の間のつり合い関係は

$$\tilde{P} = \tilde{A}^t \cdot \tilde{S} \quad \cdots\cdots ⑧$$

材端変位は、それが接続する節点の変位と等しいということより、

$$\tilde{\delta} = \tilde{A} \cdot \tilde{u} \quad \cdots\cdots ⑨$$

単一部材剛性 $\tilde{K_i}$ を対角行列に並べた行列を、primitive 剛性行列 $\tilde{K}$ とすると、

$$\tilde{S} = \tilde{K} \cdot \tilde{\delta}, \qquad \tilde{K} = [\diagdown \tilde{K_i} \diagdown], \qquad \tilde{K_i} = \begin{bmatrix} {}_{II}\tilde{K_i} & {}_{IF}\tilde{K_i} \\ {}_{FI}\tilde{K_i} & {}_{FF}\tilde{K_i} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots ⑩, ⑪, ⑫$$

よって系全体について、外力－変位関係は ⑧，⑨，⑩式を用いて次式で表わされる。

$$\tilde{P} = \tilde{A}^t \tilde{K} \tilde{A} \cdot \tilde{u} \quad \cdots\cdots ⑬$$

3－2，定向グラフの概念を用いた場合.

定向グラフは外見上有向グラフとは全く差異は見あたらない。後者と同じように、全ての部材に方向が任意に与えられている。しかしながらこの方向性は確定しており、その方向に従ってのみ、諸量の移行が許される。

与えられた骨組の全ての部材に方向を与え、始端Iと終端Fを確定する。全ての物理量は定向グラフの性質上、一方向にのみ移行すると考える。

節点接続行列 $\underline{A}$ を始端，終端部分に分割する。

$$\tilde{\underline{A}} = \tilde{A}_I + \tilde{A}_F \quad \cdots\cdots ⑭$$

この分割された節点接続行列を用いると、節点でのつり合い式は、次式のように表わされる。

$$\tilde{P} = [\tilde{A}_I^t \quad \tilde{A}_F^t] \begin{Bmatrix} \tilde{S}_I \\ \tilde{S}_F \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots ⑮$$

$\tilde{S}_I$, $\tilde{S}_F$；材端力を始端，終端に関する部分に分割.

また、適合条件式として、次式が与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\delta}_I \\ \tilde{\delta}_F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_I \\ \tilde{A}_F \end{bmatrix} \cdot \tilde{u} \quad \cdots\cdots ⑯$$

全ての部材の力－変形関係として

$$\begin{Bmatrix} \tilde{S}_I \\ \tilde{S}_F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{II} \\ \tilde{K}_{FI} \end{bmatrix} \cdot \tilde{\delta}_I + \begin{bmatrix} \tilde{K}_{IF} \\ \tilde{K}_{FF} \end{bmatrix} \tilde{\delta}_F = \begin{bmatrix} \mathrm{I} \\ T_A \end{bmatrix} \tilde{K}_{II} \tilde{\delta}_I + \begin{bmatrix} T_B \\ \mathrm{I} \end{bmatrix} \cdot \tilde{K}_{FF} \cdot \tilde{\delta}_F \quad \cdots\cdots ⑰$$

⑮，⑯，⑰式を用いることにより、系全体の力－変位関係式は次式のように求まる。

$$\tilde{P} = \bar{A}^t \tilde{K}_{II} \tilde{A}_I \cdot \tilde{u} + \bar{\bar{A}}^t \tilde{K}_{FF} \tilde{A}_F \; \tilde{u} \quad \cdots\cdots ⑱$$

ここで

$$\bar{A}^t = \tilde{A}_I^t + \tilde{A}_F^t T_A, \qquad \bar{\bar{A}}^t = \tilde{A}_I^t T_B + \tilde{A}_F^t \quad \cdots\cdots ⑲, ⑳$$

4　あとがき

⑬式，および⑱式は、⑥式の書き換えたものである。すなわち単一部材を組み合わせて系を組み立てる操作において、グラフ理論に定義される無向グラフ，定向グラフの概念を用いた。

[参考文献] 1) R.K. Livesley, "The Application of an Electronic Digital Computer to Some Problems of Structural Analysis", The Structural Engineer, January, 1956.