差分法による座屈荷重の算定

関西大学工学部　正会員　三上市蔵
〃　大学院　学生員　○小林公博
〃　工学部　正会員　米沢博

<u>まえがき</u>　微分方程式の近似解法として差分法が古くから用いられている。差分法は高度な数学を用いないため簡明であること，電子計算機のためのプログラミングに比較的適していることなどを考えると，今後も有効な近似解法として多用されるものと思われる。

高精度の差分解を得るには分割数を細かくすればよいが，それに伴って未知量数が増加し，解を得るためにかなりの手数を必要とする。この大次元の問題はSOR法，ADI法など，有効な反復解法の使用によって解決される。一方Fox[1]の多分点法をはじめHermitian法[2]など[3]，未知量数を増さずに高精度差分表示の使用によって解の精度を向上させる方法もある。Southwell[4]は前者を工学者的手法，後者を数学者的手法とよんで，後者の多分点法に疑問を唱えているが，その後の多数の使用例によって高精度差分法の有効性は立証されている。

高精度差分法の中でも，境界条件式のみ高精度差分表示する方法（境界改良法）が比較的簡単で，高精度を期待できることがはり[5]や板の曲げ[5]および振動[6]の問題に対して明らかにされている。座屈問題については板の圧縮座屈の場合，境界条件式の差分誤差が誤差全体の中でかなりの割合を占めることが指摘[7]されている。ここでは等方性板の圧縮および曲げ座屈，縦方向補剛材を有する板の圧縮座屈，急変断面板の圧縮座屈などを取り上げ，種々の境界条件，連続条件に対する境界改良法の有効性を検討する。

また微係数の差分表示から微分方程式の差分式を組み立てる方法として一つの新しい方法を考え，これを従来の方法と比較する。

<u>差分表示とその誤差</u>　r階微係数 $f_0^{(r)}$ の差分表示をk個の分点における未知関数値 $f_{-\ell+1}, \cdots\cdots, f_0, \cdots\cdots, f_{k-\ell}$ の一次関係

$$f_0^{(r)} = \sum_{i=-\ell+1}^{k-\ell} a_i f_i + E \qquad (1)$$

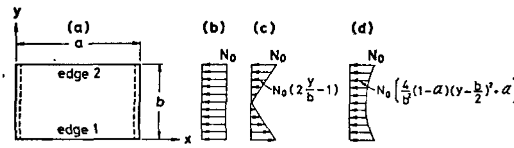
として表現すると打切り誤差のorderは分割間隔Sおよび微係数に関して一般に

$$E = O(S^{k-r}) = O(f_0^{(k)}) \qquad (2)$$

となる。普通差分法では$E=O(S^2)$の差分表示が，改良差分法では$E=O(S^4)$の表示がよく用いられる。いずれの場合も基礎微分方程式および境界条件式中の各微係数の差分誤差はSのorderで揃えられているから，微係数に関するorderは揃っていないことになる。差分表示式(1)は関数fを$k-1$次の関数で近似したことと等価[8]になるから，各微係数によって異った次数の関数で近似していることになる。そこで近似式の次数を揃えて微分方程式の差分表示を組立てる方法が考えられる。すなわち分点数kを揃える方法であり，誤差の微係数に関するorderを揃える方法である。いわば従来の組立て法は差分間隔型であるのに対して，微係数型の組立て法である。

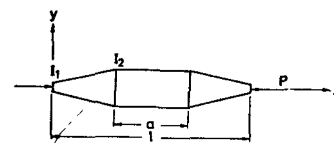
<u>境界改良法</u>　境界条件式の差分表示のみ$O(S^4)$にした場合の解の精度を検討した。まず境界条件の相違と解の精度との関係を，図-1 (a)に示す2辺単純支持板が等分布圧縮

力（図－(b)）を受ける場合について，調べた。他の2辺の境界条件は単純支持(SS)，固定(FX)，弾性支持(ES)，弾性固定(ER)の4通りとした。また応力が変化する場合の例として，曲げ（図－(c)）を受ける場合を選んだ。辺1はSSとし，辺2がSS，FX，ES，ERの場合について検討した。



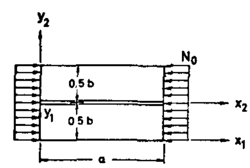
図－1

つぎに基礎微分方程式の微係数の係数が定数でない場合に対する境界改良法の有効性を調査した。定数でない係数が固有値の項に無関係な例として変断面柱（図－2）を，関係する場合の例として周辺単純支持板が図－1(d)の非線形分布圧縮力を受ける場合を選んだ。

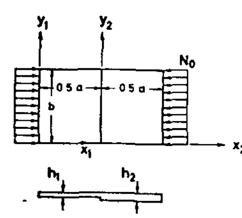


図－2

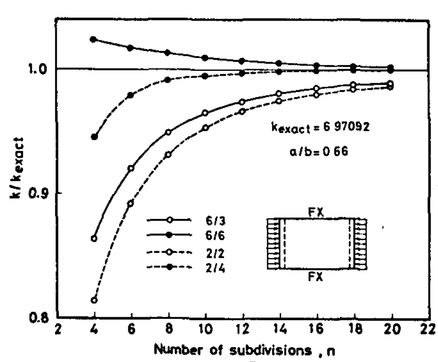
連続条件式の差分表示を高精度にすることの効果を，縦方向補剛材を有する周辺単純支持板の圧縮座屈（図－3）および周辺単純支持急変断面板の圧縮座屈（図－4）を例に選んで検討した。



図－3



図－4



図－5

微係数型差分表示　前記の例題について，従来の差分間隔型表示による場合と微係数型表示による場合との比較を行なった。いずれの場合も境界・連続条件式は高精度表示してある。

数値計算例　計算結果の一例を図－5に示す。計算結果とその考察との詳細は講演会において述べる。

参考文献

1) Fox,L.:Some inprovement in the use of relaxation methods for the solution of ordinary and partial differential equations,Proc.of the Royal Society of London,Ser.A,Vol.190,1947,pp.31-59.
2) Collatz,L.:The Numerical Treatment of Differential Equations,translated by P.G.Williams,3rd ed.,Springer-Verlag,Berlin,1966.
3) 岸野佑次・佐武正雄：差分による構造解析の高精度化について,土木学会論文報告集, No.177, pp.63-70, 1970-5.
4) Southwell,R.V.:The guest for accuracy in computations using finite differences,Numerical Methods of Analysis in Engineering,ed. by L.E.Grinter, Chap.4,pp.66-74,Macmillan Company,1949.
5) Croll,J.G.A.,and J.C.Scrivener:Convergence of hyper finite difference solutions,Proc.of ASCE,Vol.95,No.ST5,pp.809-830,May,1969.
6) Abramowitz,M.,and W.F.Cahill:On the vibration of a square clamped plate, Jour.of Assoc.of Computing Mathinery,Vol.2,pp.162-168,Nov.,1955.
7) Nishino,F.:Error in finite difference solutions of local buckling strength, Trans.of JSCE,No.127,pp.23-36,Mar.,1966.
8) Shaw,F.S.:An Introduction to Relaxation Methods,Dover Publications,Inc.,1953.