

伝達マトリックス法によるアーチの面内弾性座屈解析について(オノ 報)

(株)神戸製鋼所 正 波田 凱夫
 〃 〃 新家 徹
 〃 〃 ○ 頭井 洋

1. まえがき

アーチの面内弾性座屈については、古くから研究され代表的な載荷形式に対しては、ほぼ明らかにされ実用設計に適用されている。この方面のこれまでの研究は、Austin によりまとめられている。³⁾しかし任意の形状、断面、載荷形式に対する汎用解析についての研究は、現在までのところ変形法の適用によるもののみのように思われる。変形法による弾性座屈解析については、数多く研究されているが前提となっている条件あるいは数値計算上に問題が残っているように思われる。⁴⁾著者の一人はすでに横構で連結された二本アーチの横倒れ座屈を伝達マトリックス法を用いて解析しているが、ここではアーチの面内弾性座屈の解析を伝達マトリックス法により行なった。この方法によれば、任意形状、任意断面のアーチの任意荷重に対する面内弾性座屈解析を容易に行なうことができる。

2. 伝達マトリックスの誘導

解析にあたり用いた主な仮定はつぎのようである。

- 1) アーチ軸の伸縮はない。
- 2) 座屈する前の変形は微小である。
- 3) 適当に分割された要素内では、変形前の曲率 K_0 , 部材の曲げ剛性 EJ , および半径方向分布荷重 q_n 接線方向分布荷重 q_s (図1参照) は一定である。

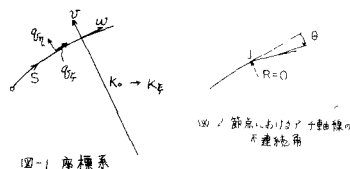


図-1 座屈系

図1に示すように荷重および変位の正方向をとった時、アーチの面内座屈解析の基礎式は上記の仮定のもとでつぎのように与えられる。¹⁾

$$\left[\frac{1}{K_0} \{ EJ \left(\frac{w}{R_0} \right)'' \} \right]' + \left[\frac{1}{K_0} \{ EJ (K_0 w) \}' \right]' + K_0 \{ EJ \left(\frac{w}{R_0} \right)'' \} + K_0 \{ EJ (K_0 w) \}' = - \left(\frac{q_n}{K_F} \right)' - q_s \quad (1)$$

図1において v, w はそれぞれ半径方向、接線方向の変位を、 S はアーチ軸線にそった座標を示している。また式(1)で $(\quad)'$ は S に関する微分を示し、 K_F は変形後の曲率を表わし次式により与えられる。

$$K_F = K_0 - v'' - w' K_0 \quad (2)$$

またアーチ軸の不伸縮の条件より、変形前の曲率半径を $R = 1/K_0$ とすると次式が成立する。

$$v = -R w' \quad (3)$$

2. 1. 荷重とアーチ軸線とのなす角が座屈の前後で不変の場合

$q_n = -P$, $q_s = 0$ とおき式(2), (3)を式(1)に代入し、無次元パラメータ $\lambda = PR^3/EJ$, $\mu = qR^3/EJ$ を導入すると次式が得られる。

$$\frac{d^6 w}{d\theta^6} + (2+\lambda)\frac{d^4 w}{d\theta^4} + (1+\lambda)\frac{d^2 w}{d\theta^2} = -\mu R \quad (4)$$

ここに θ はアーチ要素の中心角である。式(4)の一般解は $k^2=1+\lambda$ とにおいて次のように与えられる。

$$w = C_1 + C_2\theta + C_3\cos\theta + C_4\sin\theta + C_5\cos k\theta + C_6\sin k\theta - \frac{1}{2k^2}\mu R\theta^2 \quad (5)$$

ここに $C_1 \sim C_6$ は積分常数である。また、たわみ角を ψ 、曲げモーメントを M 、せん断力を Q 、軸力を N とすると変位と断面力の間にはつぎの関係がある！

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \frac{1}{R} \left(\frac{dw}{d\theta} - w \right) & M &= \frac{EJ}{R^2} \left(-\frac{d^2 w}{d\theta^2} + \frac{dw}{d\theta} \right) \\ Q &= \frac{1}{R} \frac{dM}{d\theta} & N &= \frac{1}{R} \frac{d^3 M}{d\theta^3} - \rho_{\eta} \left(\frac{dw}{d\theta} - \frac{d^2 w}{d\theta^2} \right) + R \rho_{\eta} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式(3)(6)に式(5)を代入し、 w, ψ, M, Q, N を θ, k および $C_1 \sim C_6$ であらわしこれらをまとめて、マトリックス表示すると次式が得られる。

$$Z(\theta) = B(\theta)A \quad (7)$$

ここに $Z(\theta)$ および A は、 $Z^T(\theta) = \{w, \psi, M, Q, N\}$ で表わされる $\theta = \theta$ における状態量ベクトルおよび $A^T = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, 1\}$ で表わされる定数ベクトルであり、 $B(\theta)$ は7行7列のマトリックスである。これよりアーチ要素の左端と右端の状態量を関係づける格間伝達マトリックス U_i は

$$U_i = B(\varphi) \cdot B(0)^{-1} \quad (8)$$

によって表わされ、この U_i により格間両端の状態量ベクトルは次式で関係づけられる。

$$Z_i^L = U_i Z_{i-1}^R \quad (9)$$

また格点 j の左側断面の状態量と右側断面の状態量を関係づける格点伝達マトリックス P_j は、格間伝達マトリックス U の各要素において $R=0$ とおけば得られる。(図2参照)。この関係を式で表示するとつぎの格点伝達方程式が得られる。

$$Z_j^R = P_j(\theta) Z_j^L \quad (10)$$

2.2. 荷重の方向が座屈の前後を通じて不変の場合

アーチ軸が変形した後も荷重がその作用方向を変えない場合には図3に示したように荷重 P および ρ_{η} は変形時に荷重分力を生じこの分力が変形および座屈荷重に影響をおよぼす。このとき

$$\left. \begin{aligned} \rho_{\eta} &= -P\cos\psi - \rho\sin\psi \approx -P - \rho\psi = -P - \rho \left(w' - \frac{w}{R} \right) \\ \rho_{\xi} &= -P\sin\psi + \rho\cos\psi \approx -P\psi + \rho = -P \left(w' - \frac{w}{R} \right) + \rho \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

を式(1)に代入しかつ若干の非線形項を省略して線形化すると変位 w に関して次式を得る。

$$\frac{d^6 w}{d\theta^6} + (2+\lambda)\frac{d^4 w}{d\theta^4} + \mu\frac{d^3 w}{d\theta^3} + (1+2\lambda)\frac{d^2 w}{d\theta^2} + \mu\frac{dw}{d\theta} + \lambda w = -\mu R \quad (12)$$

式(12)の一般解を解析的に求めるのはかなりめんどうであるのでここでは式(3), (6), (12)を1階の連立微分方程式に変換し、この係数行列を級数展開することにより格間伝達マトリックスを求めた。⁵⁾

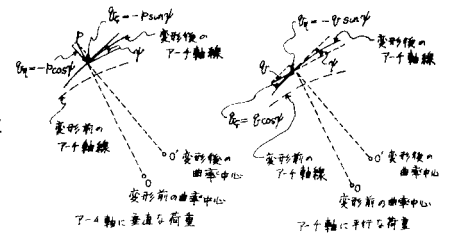


図-3 荷重の作用方向が変化する...場合の変形により生じる荷重分力

3. 座屈荷重の計算

式(9)(10)を用いて左側支点より順次に右方へ状態量ベクトルの代入計算を繰返すと、アーチの左側支点と右側支点との状態量ベクトル Z_0^R と Z_n^L とを結ぶ方程式が次のように求められる。

$$Z_n^L = U_n R_{n-1} U_{n-1} \cdots U_2 R_1 U_1 \cdots R_1 U_1 Z_0^R = T Z_0^R \quad (13)$$

T は、7行7列のマトリックスで7行7列目は荷重項に対応する要素であり、その他の各要素にも荷重の大きさや示す無次元パラメーター入、 μ を含んでいる。式(13)にアーチ両端の境界条件を代入することにより、アーチ左端の状態量のうちの自由度を決定する方程式が得られる。2-ヒンチアーチの場合両端の境界条件はつぎのようになる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{左端で} \quad W_0 = V_0 = M_0 = 0 \\ \text{右端で} \quad W_n = V_n = M_n = 0 \end{array} \right\} \quad (14)$$

式(14)を式(13)に代入することにより、次のような左端の自由度 ψ_0, Q_0, N_0 を決定する方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} t_{13} & t_{15} & t_{16} \\ t_{23} & t_{25} & t_{26} \\ t_{43} & t_{45} & t_{46} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_0 \\ Q_0 \\ N_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} t_{17} \\ t_{27} \\ t_{47} \end{bmatrix} \quad (15)$$

ここで t_{ij} は式(13)におけるマトリックス T の i 行 j 列の要素を示している。式(15)をマトリックス表示すれば次式のようになる。

$$BX = Y \quad (16)$$

式(15)あるいは(16)は、非同次の方程式であり解は一義的に定まる。座屈荷重を求めるには式(13)において荷重項に対応する要素を除けばよい。このとき式(16)はつぎのような同次方程式となる。

$$BX = 0 \quad (17)$$

座屈荷重は式(17)の X に対しすべて 0 ではない解を持ったための条件式(座屈条件式)

$$|B| = 0 \quad (18)$$

を満足する最小荷重として求められる。座屈モードは、式(17)の解を式(13)により左端より順次右方へ伝達していくことにより求められる。ただしこのとき荷重項に対応する項を除いておかねばならない。固定アーチの場合も同様にして座屈荷重および座屈モードを決定できる。式(18)の計算は試行錯誤法によればよい。実際の計算に当っては解に一般性を持たせるためすべての量を無次元化した。

4. 計算例

最も簡単な応用例として、一定断面を持ち半径方向に等分布荷重 P を受ける2-ヒンチ円弧アーチについて計算した。変形後も荷重 P はアーチ軸に直角であるとする。座屈荷重の厳密解は $P_{cr} = \frac{EJ}{R^2} (\pi^2/4 - 1)$ で与えられる。また変形後も荷重が作用方向を変えない場合の解は *Bürgermeister* により解かれている。⁶⁾ これらを示したものが図4の実線および点線である。これら二つの場合について伝達マトリックス法により求めた計算値を図4にそれぞれ○●で示した。計算においては分割数を10とした。図よりわかるように

伝達マトリックス法による計算値は、理論値と完全に一致している。つぎに鉛直等分布荷重を満載する放物線アーチについて計算した。これらについては Stüssli, Lockshin 等が解析的に解いている。これらの解は、法線方向の荷重成分は変形後もアーチ軸に直角であるとの仮定のもとに得られている。同じ仮定のもとに伝達マトリックス法により求めた値を Transfer-1 とし、変形後も荷重はその作用方向を変えないとした場合の伝達マトリックス法による値を、Transfer-2 として表 1 および図 5 に示した。これらの計算では分割数を 20 とした。計算結果はすべて限界水平反力 H_{cr} の座屈係数として示した。図 5 よりわかるように Transfer-1 の計算値は Stüssli による値と良く一致している。Transfer-1 および Transfer-2 の計算値より荷重の作用方向の影響を調べてみると、いずれの場合も荷重の作用方向が変化しないとした場合の方が 1~6% 大きくなっている。しかし実際に使われることの多いライズスパン比 f/l が 0.1~0.2 の間ではその差はわずかであり実用的には荷重とアーチ軸とのなす角は座屈の前後で不変であるとしてさしつかえないと思われる。なお当然のことながら以上得られた結果の座屈モードはすべて逆対称であった。実際のアーチ橋の設計では、活荷重が半載した場合の耐荷力が問題となるが、この問題に本解法を適用し応力問題としてとりあつかう事もできる。なお軸線不伸張の仮定を捨てた場合の解法も文献(1)の基礎式によって論ずることがができる。また弾塑性解析に拡張することも可能である。これらについては機会をあらためて報告したい。

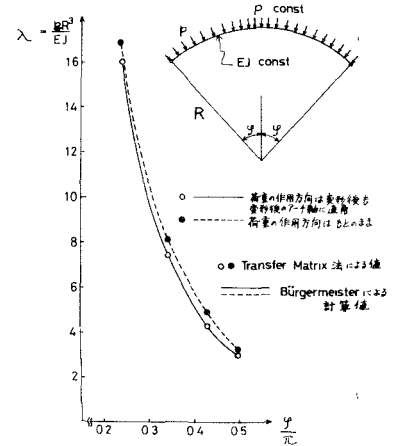


図-4 半径方向等分布荷重を受ける 2 ヒンジド拱アーチ(一定断面)の座屈係数

表-1 等分布荷重を受ける放物線アーチの座屈係数
 $\alpha = H_{cr} f^2 / EJ$ (一定断面の 2 ヒンジドアーチ)

f/l	0.1	0.2	0.3	0.4
Stüssli	36.0	28.0	20.0	13.5
Lockshin	35.6	28.4	19.4	13.7
Transfer-1	36.1	28.1	19.8	13.3
Transfer-2	36.4	28.8	20.6	14.1

$\alpha = H_{cr} f^2 / EJ$ (一定断面の 2 ヒンジドアーチ)

f/l	0.1	0.2	0.3	0.4
Stüssli	76.0	63.0	48.0	35.0
Transfer-1	75.8	63.4	48.7	35.5
Transfer-2	76.6	64.5	50.0	36.8

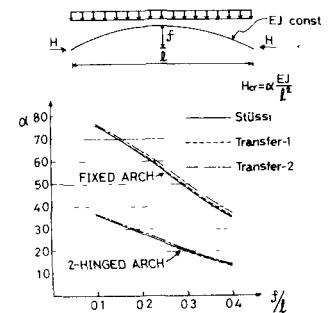


図-5 等分布荷重を受ける放物線アーチ(一定断面)の座屈係数

4. 参考文献

1. Namita, Y.; "Die Theorie II Ordnung von Krümmen Stäben und ihre Anwendung auf das Kipp-Problem des Bogenträgers", Trans. of JSCE No 155 1968
2. Sakimoto, T and Namita, Y.; "Out of Plane Buckling of Solid Rib Arches Braced with Transverse Bars" Trans. of JSCE No 141 1971
3. Austin, W.J.; "In-Plane Bending and Buckling of Arches". J. of the Structural Div. ASCE Vol 97 No 50 1971
4. 山田嘉昭編; "マトリックス法の応用" 東京大学出版会 1972
5. Pestel and Leckie; "Matrix Method in Elastomechanics" McGraw-Hill 1963
6. Bürgermeister; "Stabilitätstheorie B II" Akademie, Berlin 1963