進行波に伴なう地下空洞周辺の過渡応力解析　－積分方程式による－

京都大学工学部　正員　丹羽義次　正員　小林昭一
正員　福井卓雄　学生員○東　憲昭

1．はじめに　　地盤や岩盤は　実際には非常に複雑な挙動を示すが　巨視的に見れば　第1近似として弾性体と見なせる場合が多い。　そこで　地下空洞を弾性体中にある孔としてモデル化し　2次元弾性問題として取り扱う。　この場合のような動的弾性問題の解析については　いくつかの方法があるが、ここでは　進行波を近似的に調和波の重ね合わせとして表わし、各々の調和波による解を重ね合わせることによって　進行波による解を得る　という方法を用いた。　ここで　調和波による解は積分方程式により解析した。

2．弾性問題の基礎方程式　　等方，均質な完全線形弾性体の運動方程式，構成式，変位とひずみの関係は　カルテシアン座標系を用いて次のように書ける。

$$\bar{\tau}_{ij,j}+\bar{f}_i=\rho\frac{\partial^2\bar{u}_i}{\partial t^2},\quad \bar{\tau}_{ij}=\lambda\delta_{ij}\bar{\varepsilon}_{kk}+2\mu\bar{\varepsilon}_{ij},\quad \bar{\varepsilon}_{ij}=\frac{1}{2}(\bar{u}_{i,j}+\bar{u}_{j,i})$$

ここに　$\bar{\tau}_{ij}$，$\bar{\varepsilon}_{ij}$，$\bar{u}_i$，$\bar{f}_i$，δ_{ij} は応力テンソル　ひずみテンソル　変位ベクトル　物体力ベクトルの各成分および Kronecker のデルタを，λ，μ は Lamé の定数を，ρ は密度を表わす。　これらより　変位で表わした基礎方程式　Navier-Cauchy の式が得られる。

$$\mu\bar{u}_{i,jj}+(\lambda+\mu)\bar{u}_{j,ji}+\bar{f}_i=\rho\frac{\partial^2\bar{u}_i}{\partial t^2}\qquad\text{――――}①$$

この式において　いま物体力 $\bar{f}_i(x,t)$ が　次のような関数で与えられるとする。

$$\bar{f}_i(x,t)=\mathrm{Re}\{f_i(x)e^{-i\omega t}\}\qquad\text{ここに } f_i(x)=f_i^{(0)}(x)+if_i^{(2)}(x)$$

ここで　Re{　}は{　}の実部を意味する。　いま　ω が対象とする物体の固有振動数と異なっておれば、変位もまた過渡状態を除いては次のように書き表わせる。

$$\bar{u}_i(x,t)=\mathrm{Re}\{u_i(x)e^{-i\omega t}\}\qquad\text{ここに } u_i(x)=\bar{u}_i^{(1)}(x)+i\bar{u}_i^{(2)}(x)$$

これらを①式に代入すると次のようになる。

$$(C_1^2-C_2^2)u_{j,ji}+C_2^2u_{i,jj}+\omega^2u_i=-\frac{f_i}{\rho}$$

ここに　$C_1^2=(\lambda+2\mu)/\rho$　$C_2^2=\mu/\rho$ である。　これが調和波の定常状態における基礎方程式であるが、物体力を考えなくてもよい場合には次のようになる。

$$(C_1^2-C_2^2)u_{j,ji}+C_2^2u_{i,jj}+\omega^2u_i=0\qquad\text{――――}②$$

3．基本特異解　　無限体のある1点 ξ のk方向に単位の力が作用した時の任意の点 x におけるi方向の変位を $U_{ik}^{(\omega)}(x,\xi)$ と表わし　これを第1種の基本特異解という。　一方　応力に相当する $T_{ik}^{(\omega)}(x,\xi)=T_{ik}^{n}U_{jk}^{(\omega)}(x,\xi)$ によって次のように表わされるものを第2種の基本特異解という。　$U_{ik}^{(\omega)}(x,\xi)=U_{ki}^{(\omega)}(\xi,x)=U_{jk}^{n}U_{ji}^{(\omega)}(x,x)$　ここに　$T_{jk}^{n}=\mu\{\delta_{jk}\frac{\partial}{\partial n}+n_k\partial_j+\frac{\lambda}{\mu}n_j\partial_k\}$　ここに　$\frac{\partial}{\partial n}$ は法線微分，n_i は法線ベクトルのi方向成分である。基礎方程式②に対する基本特異解は次のようである。

$$U_{ik}^{(\omega)}(x,\xi)=A(\Psi\delta_{ij}-\chi r_{,i}r_{,j})$$

$$T_{ik}^{(\omega)}(x,\xi)=\mu A\{\{\delta_{ij}\frac{\partial r}{\partial n}+r_{,j}n_i+\frac{\lambda}{\mu}n_jr_{,i}\}\frac{\partial\Psi}{\partial r}-\{(\delta_{ij}\frac{\partial r}{\partial n}+r_{,j}n_i)+2(n_jr_{,i}-2r_{,i}r_{,k}\frac{\partial r}{\partial n})$$

$$+\alpha\frac{\lambda}{\mu}n_k r_{,i}\Big\}\frac{\chi}{r}-\Big\{2r_{,k}r_{,i}\frac{\partial r}{\partial n}+\frac{\lambda}{\mu}r_{,i}n_k\Big\}\frac{\partial\chi}{\partial r}\Big]$$

ここに $r=\sqrt{(x_i-y_i)(x_i-y_i)}$，$\psi=H_0^{(1)}(\xi_2 r)-\frac{1}{\xi_2 r}H_1^{(1)}(\xi_2 r)+\frac{\xi_1^2}{\xi_2^2}\frac{1}{\xi_1 r}H_1^{(1)}(\xi_1 r)$，$\chi=-H_2^{(1)}(\xi_2 r)+\frac{\xi_1^2}{\xi_2^2}H_2^{(1)}(\xi_1 r)$，$\xi_1=\frac{\omega}{c_1}$，$\xi_2=\frac{\omega}{c_2}$，$H_n^{(1)}$は第1種第n次のHankel関数

4．積分方程式の構成　　場の方程式を $L_{ij}u_j=0$ とすると 相反定理より次のようなBettiの公式を得ることができる。

$$\int_V[L_{ij}u_j^{(1)}\cdot u_i^{(2)}-u_i^{(1)}\cdot L_{ij}u_j^{(2)}]dV=\int_S[T_{ij}^{(1)}u_j^{(1)}\cdot u_i^{(2)}-u_i^{(1)}\cdot T_{ij}^{(2)}u_j^{(2)}]dS$$

ここに $u_i^{(1)}$と$u_i^{(2)}$は異なる2つの状態の関数で，Vは領域，Sは境界を表わす。この式において $u_i^{(2)}$に第1種基本特異解，$u_i^{(1)}$に②を満足する関数u_iを代入すると次のようなSomigliana の積分公式が導かれる。

$$F(\tilde{x})u_k(\tilde{x})=\int_S[\Gamma_{ik}^{(1)}(x,\xi)\cdot T_{ij}^{n}u_j(\xi)-\Gamma_{ik}^{(1)}(x,\xi)u_i(\xi)]dS \qquad \xi\in S \quad \tilde{x}\in V$$

ここに $F(\tilde{x})$ は点$\tilde{x}$が領域の内部，境界上，外部にあるときそれぞれ1，$\frac{1}{2}$，0の値をとる。ここで領域の境界において境界条件を満足するように仮想の境界上において $T_{ij}^{n}u_j(\xi)$ および $u_i(\xi)$を決めれば内部の点における$u_i(x)$が決まるから結局境界値問題は S（仮想境界）上の密度 $T_{ij}^{n}u_j(\xi)$ および$u_i(\xi)$を求める積分方程式に帰着される。

5．数値計算例　　弾性体中を段波（周期6πで展開したものをFig 1に示す）が進行して円孔の中央に達したときの応力の様子をFig 2に示した。ここで破線と実線はフーリエ級数の項数の取り方による計算値の比較である。なお進行波の位置による値の違いや変位の様子など詳しい結果は当日スライドで説明する。

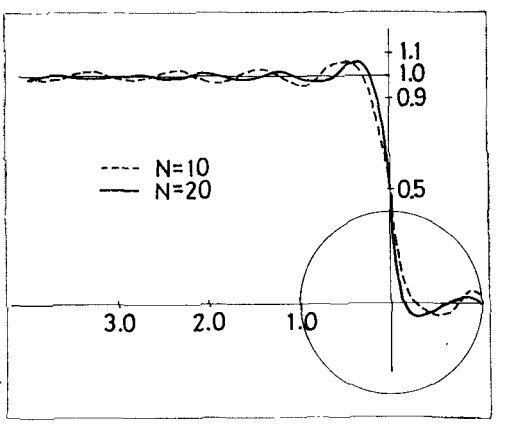

Fig 1

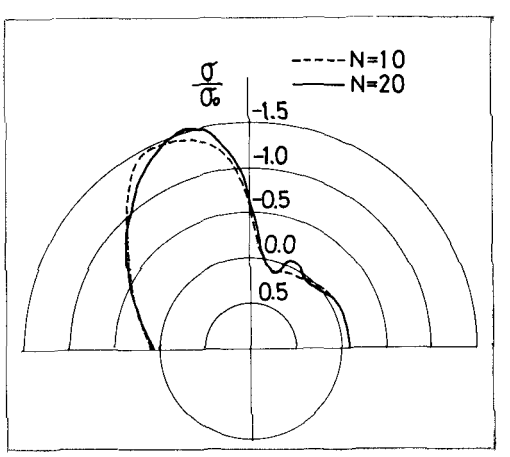

Fig 2

（参考文献）

(1)井羽義史　小林昭一，横田和男；積分方程式による任意形状多数空洞周辺の応力解析，土木学会論文報告集 175 pp27~35 (1971)

(2)Nowacki. W. ; "Dynamic ~~of~~ Elastic System" (1963)