積分方程式による三次元弾性問題の解法

京都大学　工学部　正　員　丹羽義次
京都大学　工学部　正　員　小林昭一
京都大学大学員　学生員　○清水洋次

1．はじめに

数値解析例が数多く発表されている今日、任意形状に対して、精度のよい、費用のかからない理論的に簡明な解法が特に強く求められている。有限要素法は高度の水準にまで発展し、その有用性は広く認められているが、三次元問題を解析するには、非常に多くの要素を必要とし、ときには現用の最大の電子計算機でも、容量と速度の点で足りない場合があるし、また精度も必ずしもよくない。一方、積分方程式を用いる解法は物理的意味が明確であり、任意形状の境界値問題にも容易に適用できる上、表面だけで境界条件を満たせばよいので、数値計算の際に、未知数をかなり減らすことができる。この点は三次元弾性問題の解析には特に有効である。ここでは、三次元静的弾性問題を積分方程式に表現する手法を述べ、次いで解の精度を検討し、最後に境界面に生じる応力集中を例示した。

2．基礎方程式

$[x_1, x_2, x_3]$の直交直線座標系を用いて表わしたNavierの式で$\Gamma_j^{(k)}(\xi,\eta)$を無限体内の1点η[座標(y_1,y_2,y_3)]にx_k方向に単位荷重を与えた時の1点ξ[座標(x_1,x_2,x_3)]の変位とすると次の式が満足される。

$$\mathbb{L}_{ij}\Gamma_j^{(k)}(\xi,\eta)=G\left[\Gamma_{i,jj}^{(k)}(\xi,\eta)+\frac{1}{1-2\sigma}\Gamma_{j,ji}^{(k)}(\xi,\eta)\right]=-\delta(\xi-\eta)\delta_i^k \qquad (i,j=1,2,3)$$

ここに$\delta(\xi-\eta)$はDiracのdelta function, δ_i^kはKroneckerのdelta, Gはせん断弾性係数, $\mathbb{L}_{ij}$は微分演算子, σはポアソン比である。

この$\Gamma_j^{(k)}(\xi,\eta)$はKelvin問題の解であり、次のように与えられる。

$$\Gamma_i^{(k)}(\xi,\eta)=\frac{1+\sigma}{4\pi E}\left[\frac{2\delta_{ik}}{r}-\frac{1}{2(1-\sigma)}r_{,ik}\right]$$

ここに、$r=\sqrt{(x_i-y_i)(x_i-y_i)}$, E: Young係数

また、T_{ij}を微分演算子とし、n_iをξでの法線ベクトルとすると、応力ベクトル$\Gamma_{xi}^{(k)}(\xi,\eta)$は

$$\Gamma_{xi}^{(k)}(\xi,\eta)=T_{ij}^{x}\Gamma_i^{(k)}(\xi,\eta)=\frac{1}{8\pi(1-\sigma)}\left\{\frac{\partial}{\partial n_x}\left(\frac{1}{r}\right)\left[(1-2\sigma)\delta_{ik}+3r_{,i}r_{,k}\right]-(1-2\sigma)\left[n_i\left(\frac{1}{r}\right)_{,k}-n_k\left(\frac{1}{r}\right)_{,i}\right]\right\}$$

となる。今、領域Dでつり合い状態にある2つの系$[u_i^{(1)}, T_i^{(1)}, F_i^{(1)}]$と$[u_i^{(2)}, T_i^{(2)}, F_i^{(2)}]$を考え、$u_i^{(1)}$, $u_i^{(2)}$は領域Dとその境界Sで2階微分まで連続とすると、Bettiの相反定理は、

$$\int_D\left[\mathbb{L}_{ij}u_j^{(1)}u_i^{(2)}-u_i^{(1)}\mathbb{L}_{ij}u_j^{(2)}\right]dV=\int_S\left[T_{ij}^{n}u_j^{(1)}u_i^{(2)}-u_i^{(1)}T_{ij}^{n}u_j^{(2)}\right]dS$$

と書ける。ここで$u_i^{(1)}(x)=u_i(x)$, $\mathbb{L}_{ij}u_j(x)=0$, $u_i^{(2)}(x)=\Gamma_i^{(k)}(x,\eta)$, $\Gamma_{xi}^{(k)}=T_{ij}^{x}\Gamma_j^{k}(\xi,\eta)$とし、xとyを交換して$\Gamma_{xi}^{(k)}(\eta,\xi)=\Gamma_{xk}^{(i)}(\xi,\eta)$とすると次のSomiglianaの積分公式が得られる。

$$F(x)u_k(x)=\int_S\left[\Gamma_k^{(i)}(\xi,\eta)T_{ij}^{y}u_j(y)-\Gamma_{xk}^{(i)}(\xi,\eta)u_i(y)\right]dS_y$$

ここにF(x)は領域内D_iで1，領域外D_eで0，境界S上で$\frac{1}{2}$である。

右辺の第1項は密度$T_{ij}^{y}u_j(y)$の1重層ポテンシャル、第2項は密度$u_i(y)$の2重層ポテンシャルに相当する。従って、弾性学の境界値問題を1重層ポテンシャル、あるいは2重層ポテンシャルあるいはその両方を用いて積分方程式を導き、境界条件を満足させるように、密度を求めることによって、任意の点の変位、応力を求めることができる。

3. 結果と考察

弾性学の境界値問題を積分方程式に変換するのに実境界に密度を分布させて境界条件をあわす方法と仮想境界に密度を分布させて境界条件をあわす方法とがあるが、いずれにせよ、境界面で連続的に境界条件をあわすことが必要である。そのためには密度の分布関数を求めればよいわけであるが、複雑すぎて一般には求められない。従って数値積分を行なって境界条件をあわす方法と有限個の点でのみあわす方法とが考えられる。本論文では主として後者の方法をとり、また特異積分を避けるために仮想境界をとって考えた。まず簡単な例によって数値計算結果の精度を検討する。図2,3を見ると、一般に等方性三次元内部問題は仮想境界を離してとるほど境界での応力(変位)はなめらかになり、より精度で境界条件を満足することがわかる。従って内部での応力(変位)の精度もよくなる。また仮想境界上での積分をSimpsonの公式で数値積分して近似させると、精度向上に役立つ。更に精度を上げるためには曲率を考慮に入れたGaussの積分で近似させるとよい。境界上での応力集中を調べるような場合には、仮想境界を離すだけでは、応力の急激な変化に対応できないので、meshを細かく分割することが必要である。(図5)そうすれば、Fourier級数を用いた解法に比して、積分方程式を用いた解法は境界付近で応力集中が容易に正確に求められる。このように積分方程式を用いた解法は境界条件を連続的にあわすのに面倒が生じるが仮想境界上の密度を求めれば、任意の点の応力、変位が簡単に求められ、また境界条件の複雑な場合でも簡単に取り扱うことができる。

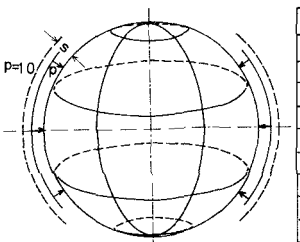

Fig 1 Surface element arrangements for the unit sphere

s	t_r
0.25	0.294067
0.50	0.664576
0.75	0.870538
1.00	0.958373
1.25	1.007020
1.50	1.003380
3.00	1.003760
4.00	1.001800
5.00	1.000940
6.00	1.000530
7.00	1.000320
8.00	1.000200
exact sol	1.000000

Table 1 Internal stresses at the center for the case of various auxiliary boundaries

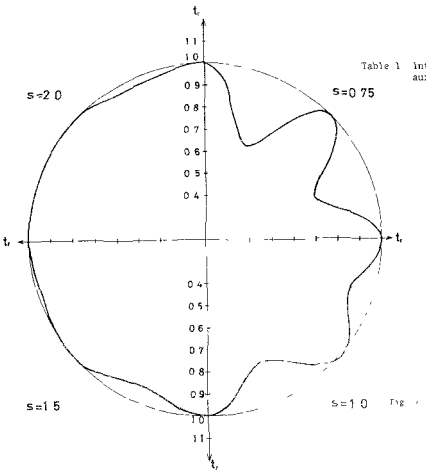

Fig 2 Surface stresses for the case of various auxiliary boundaries

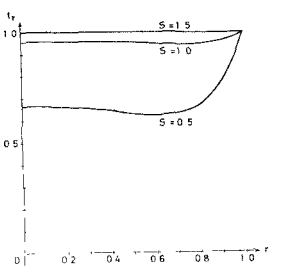

Fig 3 Internal stresses for the case of various auxiliary boundaries

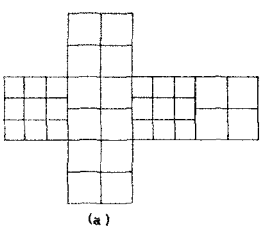

Fig 4 Surface element arrangements for the fixed end problem

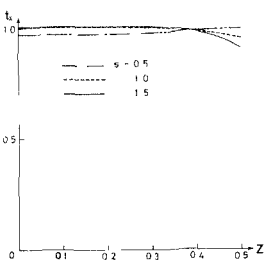

Fig 6 The internal stresses along the midline

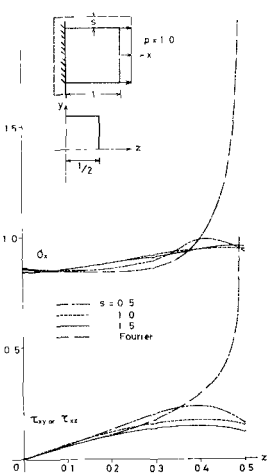

Fig 5 Stress concentrations along the midline of the fixed end