

異方性弾性体内の任意形状空洞周辺の応力解析 —積分方程式による方法—

京都大学工学部 正 員 丹羽義次
京都大学工学部 正 員 小林昭一
京都大学工学部 正 員 福井卓雄
京都大学大学院 学生員 ○中村 昭

1. はじめに

最近、弾性境界値問題を積分方程式に帰着させて解く方法が試みられ、二次元静的・動的問題、三次元問題などの数値解析に成果を収めている。この方法は任意形状の境界をもつ各種の境界値問題に適用できる。また、境界にだけを考えればよいので数値計算に際して解くべき連立方程式の次元数が少なく済む。ここではこの方法を異方性弾性問題に拡張することを試み、二次元直交異方性問題について数値計算を行った。

2. 基礎方程式

弾性体内の物体力を0とすれば静的弾性問題の基礎方程式は次のように書ける。

$$L_{ij} u_j(x) \equiv C_{ipjq} u_{j,pq} = 0 \quad (1)$$

ここに $L_{ij} \equiv C_{ipjq} \partial_p \partial_q$ は微分演算子、 $u_i(x)$ は変位ベクトル、 C_{ipjq} は弾性定数である。また、応力ベクトル $T_i^n(x)$ は点 x での法線ベクトル n_i とすれば

$$T_i^n(x) \equiv \pi_{ij}^n u_j(x) = C_{ipjq} n_p u_{j,q} \quad (2)$$

と書ける。物体力が0のときの弾性境界値問題は弾性体内に場の方程式 $L_{ij} u_j(x) = 0$ を満たし、与えられた境界条件を満たす変位ベクトル $u_i(x)$ を求めればよい。

次の方程式を満たす関数 $\Gamma_{ij}^{(k)}(x, y)$ を弾性方程式の基本解という。

$$L_{ij} \Gamma_{ij}^{(k)}(x, y) \equiv C_{ipjq} \Gamma_{j,pq}^{(k)} = -\delta_{ik}(x-y) \delta^{(2)} \quad (3)$$

ここに x, y は位置ベクトル、 $\delta^{(2)}$ は Kronecker delta であり、 L_{ij} は x について作用する。弾性基本解の物理的意味は弾性無限体の一点 y に x_k 方向に単位集中力 δ_{ik} が作用したとき点 x に生ずる変位ベクトルの x_i 成分である。弾性基本解は x と y が一致すると無限大となり特異性を示す。次に、 $\Gamma_{ij}^{(k)}(x, y)$ に演算子 T_j^n と x について作用させこ得られる関数を $\bar{\Gamma}_{ij}^{(k)}(x, y)$ で表わし、無限体内に生ずる応力ベクトルが得られる。

二次元異方性問題の弾性基本解は、異方性無限板に作用する単位集中力 δ_{ik} が生ずる変位・応力をもとめればよい。これは複素解析関数を用いて容易に計算できる。詳細については参考文献を参照されたい。

3. 解法

ここで対象とする問題は異方性無限板内に任意形状の孔が存在し無限遠より一様な応力が作用したときの変形・応力解析である。このような問題は外部応力境界値問題に分類できる。いま、対象とする外部領域を D_e 、その境界を ∂D で表わせば

$$\left. \begin{aligned} L_{ij} u_j(x) &= 0 & x \in D_e \\ \lim_{x \rightarrow x_0} T_i^n(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \pi_{ij}^n u_j(x) = f_i(x_0) & x_0 \in \partial D \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

と書ける。弾性境界値問題を積分方程式に帰着させる方法にはいくつかあるが、いま(4)の解が弾性基本解を用いて次の形に書けるとすれば

$$u_i(x) = \int_{\partial D} \Gamma_{ik}^{(0)}(x, y) M_k(y) dS_y \quad y \in \partial D \quad (5)$$

(5)は場の方程式 $\Delta_{ij} u_j(x) = 0$ を満たし、境界値問題(4)は次の積分方程式と同等になる。

$$f_i(x_0) = -\frac{1}{2} \mu_i(x_0) + \int_{\partial D} \tilde{\Gamma}_{ik}^{(0)}(x_0, y) M_k(y) dS_y \quad (6)$$

3. 数値計算

積分方程式(6)はその核 $\tilde{\Gamma}_{ik}^{(0)}(x_0, y)$ が x_0 と y が一致すると無限大となり特異性を示すのでその積分は特異積分となる。そこで数値計算上の困難さをなくするために仮想境界なるものを考える。Fig. 1 のように仮想境界 $\partial \bar{D}$ を考えその上に密度 $M_k(y)$ を分布させる。そしてこれによって実境界 ∂D 上に生ずる応力ベクトルが与えられた境界条件を満足するように $\partial \bar{D}$ 上の密度 $M_k(y)$ を決める。すると(6)の代わりに

$$f_i(x_0) = \int_{\partial \bar{D}} \tilde{\Gamma}_{ik}^{(0)}(x_0, y) M_k(y) dS_y \quad (7)$$

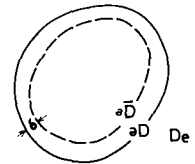


Fig. 1

一般には密度 $M_k(y)$ の分布形を解析的に決めることは困難なので、 $\partial \bar{D}$ を多角形に近似して(7)を連立方程式の形に書き直し数値計算を行った。数値計算には直交異方性板を考へその弾性主軸を座標軸に取った。

Fig. 2 は単一円孔に無限遠より一様な引張応力 $p=1.0 \text{ kg/cm}^2$ が x 軸方向より作用したときの円孔まわりの応を示す。ここに $\delta=0.5a$, $n=72$, $e=e_1 e_2=1, 2, 3$, $\nu_k=0.2$, $\frac{1}{G} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{2\nu_k}{E_1}$ である。Fig. 3 は双設円孔の例であり、 $d=0.4a$, $n=72$, $\varphi=0^\circ, 90^\circ$ である。(φ は一様応力の作用する方向と x 軸のなす角度である。)

結果をみると異方性の強いときは、弾性係数の大きい方向で精度が上がる。これは基本解の特異性の影響で、異方性の強いときは弾性係数の大きい方向で分割数を増し精度を向上させることが必要である。詳細は当り発表する。

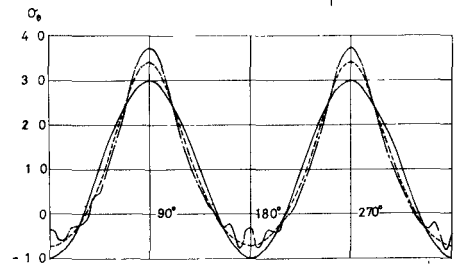
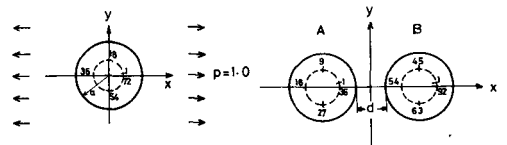


Fig. 2

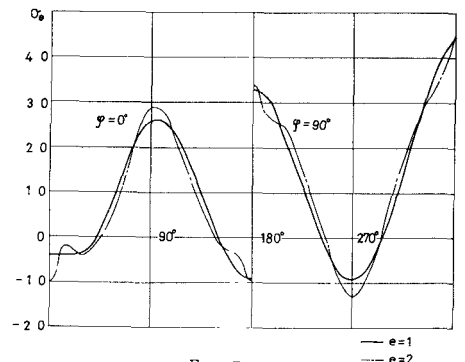


Fig. 3

参考文献

- 1) Lekhnitskii, S.G.; "Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body" San-Francisco, Holden-Day (1963)

- 2) 横田和男; 京都大学修士論文(1971)