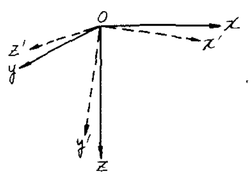
引張限界を有する不均質3次元体の一数値解法

大阪工業大学　正員　○岡村宏一
東洋技研コンサルタント　正員　島田　功

1. まえがき： 筆者はすでに，弾塑性，あるいは異種部材を内蔵するような不均質性をもつ3次元体の1数値解法を発表した。[1] この解法は本質的に弾塑性 あるいは不均質弾性を含む3次元問題の基礎微分方程式の解法であり，この点，3次元体内に節点を設けた近似モデルを扱う有限要素法とはその出発点を異にしている。また，本解法は弾性問題の厳密解であるMindlin解の線形化した重ね合わせによる連続解を基底に置いており，このような解法の性格に基づくものとして，3次元体内の未知量の制約や，Integral Method に属する境界調整の方法を含め，高精度の解が期待できるなどの特長を持っており，また級数解法に見られるような適用範囲の著るしい制限を解除し，代数関数であるMindlin解の多面的な応用によって解式の系統立てがなされている。今回は，この解法を，引張限界を持つ3次元体が，内蔵された異種材料の挙動によってひびわれを生ずる場合に，その3次元解析を行なえるように発展させたものを提示する。

2. 解法： 図−1に示す直交座標系x-y-zに対応した応力成分を$\{\sigma\}$とし，これらと傾斜した任意の直交座標系x'-y'-z'を考え，この軸に対応する応力成分を$\{\sigma'\}$とする。これらの間には周知のように次の関係がある。

$$\{\sigma'\}=[L]\{\sigma\} \text{ --------(1)}$$



図−1

ひずみ成分$\{\varepsilon\}$および$\{\varepsilon'\}$についても同様に

$$\{\varepsilon'\}=[K]\{\varepsilon\} \text{ --------(2)}$$

ただし，式(1),(2)における$[L]$,$[K]$は座標変換マトリックス

さて，許容引張応力に達すると亀裂が発生するような非線形な状態の解法としては，まず，永年方程式の実根として与えられる，主応力σ_i $(i=1,2,3)$を求めその中で，引張限界σ_tに達したものが簡単のため1つ存在したとし，その方向を前述のx'方向とすると，そこではその方向の$\sigma_{x'}$および$\tau_{x'y'}$，$\tau_{z'x'}$に抵抗しえない材料に変化する。そのような非線形モデルとして，任意の$\{\varepsilon'\}$に対し上記の3つの応力成分が0となるように$\{\sigma'\}=[D']\{\varepsilon'\}$で表わされる応力−ひずみマトリックスを変える。（ある行および列の弾性係数を0とする。）

このような変換を行い，式(1),(2)を用いて変形すると

$$\{\sigma\}=[L]^{-1}[D'][K]\{\varepsilon\}=[D]\{\varepsilon\} \text{ ----------------------(3)}$$

これは，亀裂により母体の一部がある種の異方性になるものと仮定した，応力−ひずみ関係をx-y-z座標に対応して定めたものである。異種材料の部分についても母体と異なった$[D]$を持つ状態であり，以下同様な基礎式となる。さて，一般に3次元問題において解

1) 岡村，島田；弾塑性，もしくは不均質弾性を有する3次元体の一数値解法　土木学会論文報告集 No.212 1973年4月

の見出されている基本的な Case は等方弾性体の場合で，その応力－ひずみマトリックスを $[D_0]$ とする。両者の偏差は，亀裂の状態および異種材料によって異なるが，これを一般に $[\Delta D]$ とすれば式(3)は，次のようになる，

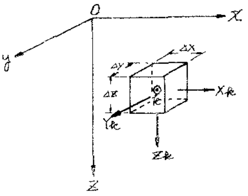
$$\{\sigma\}=[D_0]\{\varepsilon\}+[\Delta D]\{\varepsilon\} \quad \text{------------------------}(4)$$

そこで，亀裂および不均質性を有する部分を支配する周知のつり合い条件式は，

$$\left.\begin{aligned}
(\lambda_0+G_0)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right)+G_0\nabla^2 u&=-X\\
(\lambda_0+G_0)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}\right)+G_0\nabla^2 v&=-Y\\
(\lambda_0+G_0)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+G_0\nabla^2 w&=-Z
\end{aligned}\right\} \quad \text{--------------}(5)$$

ただし，右辺の X, Y, Z は体積力に相等する項で次の形となる。

$$\left.\begin{aligned}
X&=\frac{\partial\sigma_x^*}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}^*}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}^*}{\partial z}\\
Y&=\frac{\partial\sigma_y^*}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}^*}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{xy}^*}{\partial x}\\
Z&=\frac{\partial\sigma_z^*}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{zx}^*}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}^*}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \quad \text{--------------}(6)$$



図－2

また，$\{\sigma^*\}=[\Delta D]\{\varepsilon\}$ ------------------------(7)

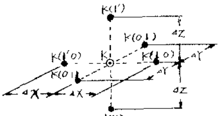
さて，上記の基本となる解は，すでに筆者が用いてきた，Mindlin の第1，第2問題の解である。まず，母体に作用させる荷重および境界調整力による変位成分 δ_0, δ_c および ε_0 ε_c, σ_0, σ_c を求める。次に式(6)の X, Y, Z によるそれらを求めるため弾性体内の亀裂または不均質性による剛性の変化によってある点 k で考慮されるべき物理量 X_k, Y_k, Z_k は，その点を中心とする比較的小さい有限な容積 《$V_k(\Delta x\times\Delta y\times\Delta z)$》内では，均一な分布を持つものと見なす。したがって，これらによる応力成分，σ_v が X_k, Y_k, Z_k を含んだ式は次式で表わされる。

$$\varepsilon_v=\sum_k\left(X_k\times\int_{V_k}\varepsilon_2\,dV+Y_k\times\int_{V_k}\varepsilon_2\,dV+Z_k\times\int_{V_k}\varepsilon_1\,dV\right) \quad \text{----------}(8)$$

δ_v, σ_v と同様に表わされる。上式中，ε_1, ε_2 は既述の Mindlin 第1，第2問題の解より得られるものである。ところで，これらの解を決定するためには X_k, Y_k, Z_k の諸量が確定しなければならない，しかし，式(6)でわかるように，それらは $\{\sigma^*\}$ の1次微分よりなり，また式(7)から σ^* は ε_v を陰の形で含んでいる。そこで文献[1)]でも用いてたように X_k, Y_k, Z_k を線形化するために部分的に差分法が用いられる。点 k，ならびに周囲の6点について，図－3に示すネットを考え，後述の逐次計算のある過程で，これらの各点の ε_0, ε_c の近似値が与えられたとすれば，式(7)の σ^* を参照して，ε_v の1次関数となることがわかる。したがって剛性の異なる部分で考慮される有限領域の選点における ε_v を未知量とした式(8)で形成される連立方程式の解として定まる。

3. 逐次計算の方法

まず，部分的な剛性変化を有する3次元体内のどこかの点で引張主応力が σ_t になれば，この段階から逐次計算により追跡する。



図－3

すなわち，引張主応力が許容値以上になった要素に対して，前述の剛性の変化を仮定し異方性をもったものとして解析する。

講演当日，計算例も申し述べる。