

有限帯板法および簡易化モデルによる構造解析

京都大学工学部 正員 山田 善一
同 上 正員 渡辺 英一
近畿日本鉄道 正員 西井 克之
京都大学大学院 学生員 水谷 孝三

1. まえがき

近年橋梁工学の進歩や高張力鋼の出現などによって、大スパンのプレートガーダーが使用されるようになり、プレートガーダーが長大化してきたため、現行の示方書や従来の解析法に対する再検討の必要性が出てきた。プレートガーダーを合理的に設計する場合、従来のように腹板とフランジを切り離して腹板の弾性座屈を考えるのではなくてこれらを一体として取り扱い、プレートガーダー全体としての耐荷力を考えるのが妥当であり合理的であると思われる。従ってここでは簡単な板モデルについて、細長い帯状の要素に分割して線形座屈解析を行ない、厳密解との比較検討を試みる。

2. 簡易化モデルについて

両端で単純支持された板を橋軸直角方向（ y 軸方向）にいくつかの有限幅を有する板に分割し、橋軸方向（ x 軸方向）には曲げ剛性、ねじり剛性、曲げねじり剛性を有する連続体のほりと見なし、 y 軸方向には曲げ剛性が無限大とし、連続体である板と等価にするために曲げモーメントを導入し、それらが x 軸方向に等分布しているものと仮定する。（Fig.1参照）ここで y 軸方向には各帯板の間の節線において変位は連続であるが、たわみ角は不連続とする。このことによってバネの導入の効果が發揮され、 x 軸方向には一般のほりに関する弾性理論が適用でき、問題が簡易化される。今このモデル化した「要素」のポテンシャルエネルギーを求めると、

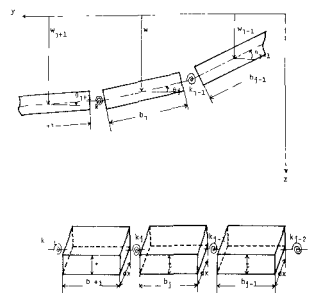


Fig.1

$$U_j - V_j = \frac{1}{2} \int_0^a [EJ_{Lj} w_{j,xx}^2 + \bar{C}_{Lj} \theta_{j,x}^2 + EC_{wj} \theta_{j,xx}^2] dx - \frac{1}{2} \int_0^a [N_{j,x} w_{j,x}^2 + 2S_j (\omega_j + \frac{b_j}{2} \theta_j) - 2S_{j-1} (\omega_j - \frac{b_j}{2} \theta_j)] dx \quad (1)$$

$$\text{但し、} \bar{C}_{Lj} = GJ_{Lj} + GJ_{Tj} b_j - \int_A \rho(x+y)_j dA$$

式(1)の変分をとって、被積分関数を f として表わすと、

$$\frac{\partial f}{\partial w_j} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial w_{j,x}} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial w_{j,xx}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta_j} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \theta_{j,x}} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial \theta_{j,xx}} = 0 \quad (2)$$

が連立的に得られ、式(2)に要素 j と要素 $j+1$ との連続条件である。

$$w_{j+1} - w_j = \frac{1}{2} b_{j+1} \theta_{j+1} + \frac{1}{2} b_j \theta_j \quad (3)$$

を加えて要素 j に関する基礎方程式が得られる。ここで各要素内のたわみ、回転角、せん断力を x 軸方向にフーリエ級数展開し、それらを式(2)、(3)に代入することによって

$$([K] - \lambda [K_G]) \{ \delta \} = 0 \quad (4)$$

となるが、 $[K]$ 及 $w[K_G]$ は diagonal にのみ部分マトリックスを有するので、

$$|[K] - \lambda[K_0]| = |[K]_1 - \lambda[K_0]| \cdot |[K]_2 - \lambda[K_0]| \cdots |[K]_n - \lambda[K_0]| \quad (5)$$

を考慮することにより m 次のモードに対する座屈荷重方程式を単独に解けばよいことになる。一般には座屈モードの異なるものの間で座屈値が一致するのであるが、一様圧縮及び曲げの場合にはそれらの連成がないと考えられる。なおその連成があるかどうかは容易に調べられる。従って以上のことにより m 次の座屈モードに対応する座屈荷重は

$$|[K]_m - \lambda[K_0]| = 0 \quad (5)$$

という固有値問題に帰着し、 λ で与えられる。

3. 有限帯板法について

Fig. 2 のように板を分割して各要素について考え、通常の有限要素法と同じようにして剛性マトリックスを求める。

たわみは、 y 方向にはフーリエ級数的に、また x 方向には 3 次関数的に変化するものとして次のような変位関数を仮定する。

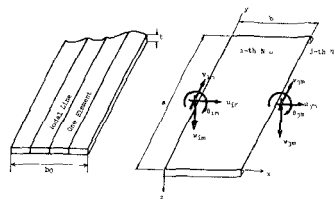


Fig. 2

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{3x^2}{b^2} + \frac{2x^3}{b^3}\right) w_{im} + \left(x - \frac{2x^2}{b} + \frac{2x^3}{b^3}\right) \theta_{im} + \left(\frac{3x^2}{b^2} - \frac{2x^3}{b^3}\right) w_{jm} - \left(\frac{x^3}{b^3} + \frac{x^2}{b^2}\right) \theta_{jm} \right] \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (6)$$

要素内にたくわえられる曲げエネルギーを U^e 、面内荷重 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ による仕事を V^e として

$$U^e = \frac{1}{2} \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \quad (7)$$

$$V^e = -\frac{1}{2} \iint \left[\sigma_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2\tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy \quad (8)$$

変分をとるとこれは、

$$([K_B] + [K_0])\{\delta\} = ([K_B] + \lambda[K_0])\{\delta\} \quad (9)$$

となり、 $[K_B]$ は式(7)より求められる曲げ剛性マトリックスで、 $[K_0]$ は式(8)より求められ、幾何剛性マトリックスと呼ばれるものである。 $[K_0]$ は単位の負荷による幾何剛性マトリックスで座屈値は λ で与えられる。また各モードに対しても 2 と同じことがいえる。

4. 解析結果および考察

3 辺単純支持、1 辺自由の正方形板について分割数をえて収束性を示したものが Fig. 3 である。また周辺単純支持の正方形板について、FEM と FSM と比較すると一様圧縮が作用した場合、Kapur によると 12×12 要素で $k=3.97$ であるのに対し、FSM では 2 分割で $k=4.009$ という高精度の解が得られることがわかった。本解析法では少ない自由度で精度の良い解が得られ、フランジと腹板と同時に解析出来、しかもそれらの相互作用を容易に解析出来ることである。そして今後は後座屈域挙動解析にも進んでいきたい。

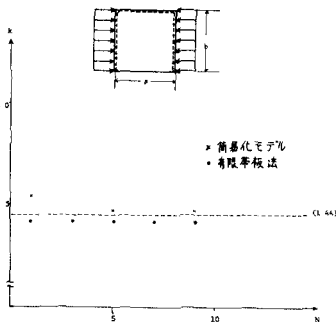


Fig. 3

参考文献 1) Cheung, Y. K., "Finite Strip Method of Analysis of Elastic Slabs." Proc ASCE, vol 94, EM 6, 1968, pp 1365 ~ 78

2) Watanabe, E., "Study of Load Distribution on Multi-Beam Highway Bridges," Iowa State Univ. Ames, Iowa, 1968