

有限要素法による板のたわみ解析

大阪大学工学部 正員 小松定夫
大阪大学工学部 正員 ○北田俊行

1. まえがき

本法では、板のたわみ問題を、ニュートン・ラフソン法と修正増分法をミックスした反復法を用いて解析した。その際、変位増分の推定には、一次の幾何学的剛性マトリックスのみを考慮し、不均衡力の算定は、D. W. Murray, E. L. Wilson の考え方を、初期にたわみを有する板にも適用できるように拡張して行った。

2. 解法 i) 変位増分 Δ の推定

荷重増分および不均衡力による変位増分の推定には、増分前の変形状態を平面の三角形要素で近似し、二次の幾何学的剛性マトリックスの項を省略した次式を用いる。

$$\Delta P + \Delta R = [K_0 + K_G] \cdot \Delta \quad \text{---- (1)}$$

ここで、 $\Delta P, \Delta R$ は、増分荷重および不均衡力を表わす。

ii) ΔR の計算 初期にたわみを有する板を、平面の三角形要素で理想化し、この状態を無応力状態とする。図-1に示すように、変形前のある要素の任意点を P、その点の変形後の位置を P' とする。さらに、変形後の要素の節点 i, j, k を含む平面内に変形前の要素を、 i 点と j 点を等しく、辺 ij が直線 ij' 上に来るように載せた時の P 点の位置を P'' とする。つまり、全変位 $\overline{PP'}$ のうち、 $\overline{PP''}$ が剛体変位を意味し、 $\overline{P''P'}$ が、実際の外力に抵抗する変位を意味する。全体座標系 (X, Y, Z) 、変形前の要素座標系 (x^*, y^*, z^*) および変形後の要素座標系 (x, y, z) による各点の座標および各変位を表-1に示す。すると、

$$u = \lambda \cdot \bar{u} \quad \text{---- (2)}$$

$$\bar{u} = \{(\lambda^* - \lambda)^T \cdot x^* + u - u_i\}$$

ここで、 λ^*, λ は、それぞれ、変形前・後の要素座標系と全体座標系を関連づける座標変換マトリックスである。いま、要素座標系による変位関数 (u, v, w) は、 x^*, y^* のみの関数として表わされると仮定する。

$$u = u(x^*, y^*), \quad v = v(x^*, y^*), \quad w = w(x^*, y^*) \quad \text{---- (4)}$$

また、式(2)および式(3)より、

$$w = (X - X_i - u_i) \cdot \lambda_{31} + (Y - Y_i - v_i) \cdot \lambda_{32} + (w - w_i + \lambda_{13}^* \cdot x^* + \lambda_{23}^* \cdot y^*) \cdot \lambda_{33} \quad \text{---- (5)}$$

さらに、 w も、 X, Y のみの関数であると仮定すると、式(2)~(5)より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} = & \{(\lambda_{31} + \lambda_{33} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}) \cdot (\lambda_{11} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial x} + \lambda_{21} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial x} + \lambda_{11} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_{21} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}) \\ & + (\lambda_{32} + \lambda_{33} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}) \cdot (\lambda_{12} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial x} + \lambda_{22} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial x} + \lambda_{12} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_{22} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}) \\ & + (\lambda_{13}^* \cdot \frac{\partial x^*}{\partial x} + \lambda_{23}^* \cdot \frac{\partial y^*}{\partial x}) \cdot \lambda_{33}\} / \{1 - (\lambda_{31} + \lambda_{33} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}) \cdot \lambda_{31} - (\lambda_{32} + \lambda_{33} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}) \cdot \lambda_{32}\} \end{aligned} \quad \text{---- (6)}$$

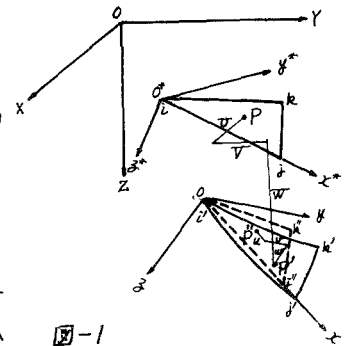


表-1

座標	(X, Y, Z)	(x^*, y^*, z^*)	(x, y, z)
点 P		$(x^*, y^*, 0)$	
点 P'	(X, Y, Z)		(x, y, z)
点 P''			$(x^*, y^*, 0)$
変位 $P-P'$	$\bar{u}$ $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$		
変位 $P''-P'$	$\bar{u}$ $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$		u (u, v, w)
変位 $i-i'$	u_i (u_i, v_i, w_i)		

$$\text{---- (3)}$$

$\partial w / \partial y$ は、式(6)において、 $\partial x^* / \partial x$, $\partial y^* / \partial x$, $\partial^2 x^* / \partial x^2$, $\partial^2 y^* / \partial x^2$ を、 $\partial^2 x^* / \partial x^2$, $\partial^2 y^* / \partial x^2$, $\partial^2 w / \partial x^2$ に置き換えればよい。式(2)および式(8)によって求めた変位に対しては、微小変形理論の有限要素法が適用できるとして不均衡力 $\triangle R$ を算定する。

3. 計算例とその考察

変位関数として、面内変形には、一定ひずみの変位関数、曲げ変形には、 η 自由度の面積座標による変位関数を用いた。また、式(1)の連立式の解法には、コレスキー法を用いた。

i) 等分布荷重を受ける周辺単純支持正方形板

荷重と最大にわみの関係を図-2に、荷重と膜応力の関係を図-3に示す。これらの図には、増分法および一回限りの反復に限った修正増分法による解もプロットしてある。変形は、三者とも Levy の厳密解によく一致しているが、応力の方は、増分法の場合、かなり増分荷重の大きさに左右されるようである。

ii) 面内荷重を受ける初期にわみを有する板

外力は、圧縮辺の変位増分を与える。その際の平均圧縮力と最大にわみの関係を図-4に示す。本法による計算値は、N. Yamaki および J.N. Coen の級数解とよく一致している。初期にわみが小さい場合、外力増分を小さくすると、座屈荷重近傍で式(1)の剛性マトリックスが擬特異性を示し、解けなくなる。したがって、初期にわみが小さい場合には、解が座屈荷重近傍にこないように、外力増分を与える必要がある。また、荷重と応力分布の関係を図-5に示す。さらに、側辺に補剛材を設けて、弾性的に拘束した場合および側辺が回転に対して固定の場合について解析し、図-6, 7に示す。なお、数値計算には、大阪大学計算センターの N-700 システムを用いた。

