表面積測定に関する一考察

大阪工業大学　正員　松井啓之輔

Ⅰ．まえがき　幾何学的な図形や平面的な図形の表面積を正確に求めることは、たやすい。　しかし、曲面で構成されている、いわゆる立体物の表面積を求めるのは、実際上面倒であり、現在その正確な値を知る方法は、あまり見かけないようである。　また、われわれの周囲には、こうした対象物が多くあり、その曲面積を簡単に求めたい必要に迫られるのは、土木関係以外にもかなりあると考えられる。　そこで、以下、曲面で構成された物体の表面積算出にたいして一考察を加え、その実用化を試みてみた。

Ⅱ．理論式の誘導　写真測量の発達によって、われわれは二次元の写像から、その物体を三次元化して観察することができ、しかも、短時間のうちに正確な等高線を描くことが容易となった。

このことから、求めようとする物体の平面図に描かれた等高線を利用し、その等高線長（周長）と、隣接する等高線の線長比（周長比）より、表面積を求める理論式を導いた。　いま、図－1のような円錐台形を考えた場合、その表面積は

$$\bar{A}=2\pi(r_1+r_2)\cdot\frac{1}{2}\bar{l}$$

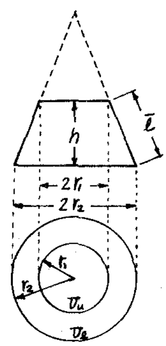
$$\text{ただし}\quad \bar{l}=\sqrt{h^2+(r_2-r_1)^2}$$

で表わされる。　ここで、下部周長 U_l／上部周長 $U_u=m$ とおき、U_u で統一すれば、$r_1=U_u/2\pi$，$r_2=U_l/2\pi$ より、理論表面積は次式で示されることになる。すなわち

$$\bar{A}=\frac{U_u+U_l}{2}\sqrt{h^2+\left(\frac{U_l-U_u}{2\pi}\right)^2}$$

$$=\frac{(m+1)U_u}{4\pi}\sqrt{(2\pi h)^2+(m-1)^2U_u^2}$$

$$=\frac{(m+1)U_u}{2C}\sqrt{(m-1)^2U_u^2+(Ch)^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$



図－1.

ここで C は等高線の形状による係数で、閉合曲線形の場合は 2π である。

上記(1)式は、隣接する2つの閉合等高線間の表面積を求める基本式であり、その値は、等高線の形状が円である必要はなく、連続した閉合形であれば、満足かつ正確な値を与える式である。　この基本式から、いくつかの形状について求積した結果を実測値と比較してみたが、その精度は極めて信頼できるものであり、(1)式が閉合等高線の形状に関係なく、正確な表面積を与えることを示している。（表－1）

また、表面積の実測については、適当な方法がないため、等高線上を細分する展開法によって作図し、プラニメーターから求積したものである。（図－2）

同様に、広範囲にわたる集合表面積についても、(1)式の和を求めればよく、次式のように表わすことができる。

$$\bar{A}=\frac{1}{2C}\left\{\sum_{n=1}^{n-1}(m_n+1)U_n\sqrt{(m_n-1)^2U_n^2+(Ch)^2}\right\}\cdots\cdots(2)$$

すなわち、閉合等高線に囲まれた部分の表面積は、すべてその等高線長のみを測定すれば求められることがわかる。

表－1.　理論式による比較

No.	理論値	実測値	誤差(%)	備考
1	151.04	147.40	－2.4	$m=3.0,h=5,U_u=12.0$
2	50.72	51.00	＋0.6	$m=1.36,h=1,U_u=25.0$
3	152.74	153.50	＋0.5	$m=1.36,h=5,U_u=25.0$
4	56.39	55.50	－1.6	$m=1.4,h=1,U_u=25.0$
5	157.40	154.10	－2.1	$m=1.4,h=5,U_u=25.0$
6	195.13	191.50	－1.9	$m=1.2,h=5,U_u=34.6$
7	183.17	177.60	－3.0	$m=1.25,h=5,U_u=31.5$
8	167.60	168.50	＋0.5	$m=1.34,h=5,U_u=27.5$
9	144.63	141.40	－2.2	$m=1.34,h=5,U_u=24.0$
10	172.29	169.90	－1.4	$m=1.21,h=5,U_u=30.5$

III. 実物模型による測定

前述の内容をさらに裏付けするため、石膏による物体を写真撮影し、その等高線図から理論値と実測値の比較を行った。その代表的な結果を表-2に示す。

全体的な精度としては、±2.4%の誤差がみられたが、これは、展開図の精否ならびにプラニメーターによる測定誤差が含まれているものと考えられ、実用上は殆んど無視してさしつかえないものである。

IV. 考察

以上、写真測量とその図化の応用から、立体的な物体の表面積を求める方法の一部をのべたが、これは閉合曲線形の場合についてであり、この範囲では至って簡便正確に値を求めることができるといえる。しかし、その他特異点を有する場合、非閉合曲線形の場合、等高線が交叉する場合等、今後明らかにしてゆかなければならない問題があり、現在研究を継続中である。

さらに、実用上の至便を考え理論式に伴う表面求積図表の試作も、現在その一部を完成させているが、これらについては今後報告させていただく予定である。

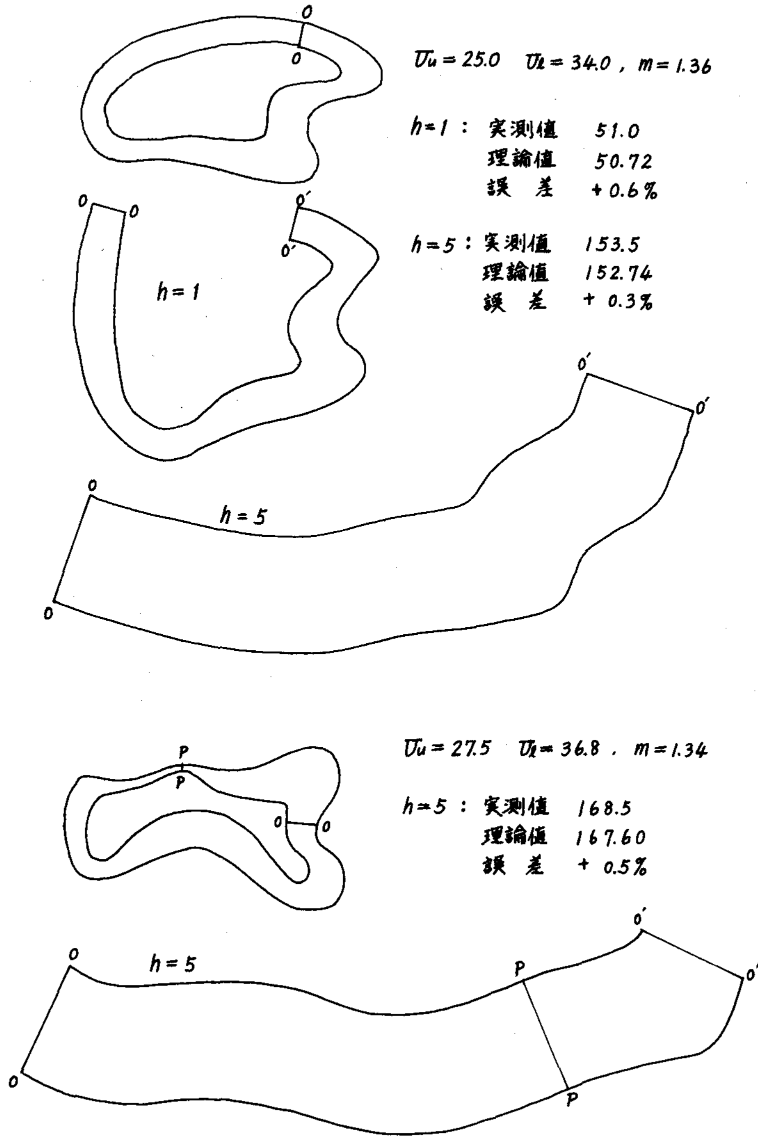


図-2. 展開図

表-2. 実物模型による比較

NO.	理論値	実測値	誤差(%)	備考
1	297.54	290.90	− 2.2	$V_1 = 31.8$, $V_2 = 37.2$, $V_3 = 48.5$, $V_4 = 54.5$, $V_5 = 60.0$
2	235.52	241.90	+ 2.7	$V_1 = 20.0$, $V_2 = 31.0$, $V_3 = 39.3$, $V_4 = 46.6$, $V_5 = 52.6$
3	336.10	329.10	− 2.1	$V_1 = 15.0$, $V_2 = 36.2$, $V_3 = 46.3$, $V_4 = 56.0$, $V_5 = 62.5$
4	246.00	250.10	+ 1.7	$V_1 = 21.0$, $V_2 = 30.5$, $V_3 = 40.2$, $V_4 = 47.5$, $V_5 = 54.0$
5	194.24	199.70	+ 2.8	$V_1 = 46.5$, $V_2 = 51.1$, $V_3 = 56.4$, $V_4 = 61.0$