等時間原則交通量配分におけるパスフローの推定

京都大学工学部　正員　佐佐木綱
同　正員　○井上博司

1．まえがき

等時間原則による交通量配分では区間交通量は一意的に求まるが，パスフローは一意的には求まらない。佐佐木はかって配分比条件という補助的な仮定を設けることによってパスフローを求める方法を提唱した。ここでは等時間原則を満す区間交通量がすでに何らかの方法で求まっているとき，その区間交通量よりパスフローを推定する方法を述べる。後述するように，この方法では先験確率式をある特殊な形に仮定すれば，配分比条件式を導入した解に一致する。

2．定式化

いま各リンクの交通量および各ゾーンペアーの間に所要時間の等しい何本かの経路が求まっているとする。またリンク j の区間交通量を X_j，ゾーンペアー i のOD交通量を S_i，ゾーンペアー i の経路 k に配分される交通量を $x_{i,k}$，ゾーンペアー i のパス行列を $R_i=(r_{i,k,j})$ で表わす。ここに，

$$r_{i,k,j}=\begin{cases}1: ゾーンペアー\ i\ の経路\ k\ がリンク\ j\ を経由するとき\\0: ゾーンペアー\ i\ の経路\ k\ がリンク\ j\ を経由しないとき\end{cases}$$

である。問題は所与の $X_j, S_i, R_i=(r_{i,k,j})$ のもとで $x_{i,k}$ を求めることである。

このとき，フローの性質から次式が成り立つ。

$$\sum_i\sum_k r_{i,k,j}x_{i,k}=X_j \quad (1), \qquad \sum_k x_{i,k}=S_i \quad (2)$$

ここでOD i の交通が経路総延長 $l_{i,k}$ のパス k を選択する先験確率を次式で仮定する。

$$p_{i,k}=\alpha_i l_{i,k}^{-\beta} \qquad (\text{ただし}\ \sum_k p_{i,k}=1) \tag{3}$$

式(3)で表わされる先験確率のもとで，OD i のパス k に $x_{i,k}$ の交通量が流れるという状態の起りやすさすなわち同時確率は次式で表わされる。

$$P=\frac{T!}{\prod_i\prod_k x_{i,k}!}\prod_i\prod_k (p_{i,k})^{x_{i,k}} \qquad (\text{ここに}\ T=\sum_i S_i) \tag{4}$$

制約条件(1), (2)のもとで最も起りやすい状態すなわち同時確率 P が最大となるときの $x_{i,k}$ を求める。そのために $\log P$ を最大にすることを考える。$\log P$ は次式で表わされる。

$$\log P=\log T!-\sum_i\sum_k \log x_{i,k}!+\sum_i\sum_k x_{i,k}\log p_{i,k} \tag{5}$$

$x_{i,k}\gg 1$ と仮定してスターリングの公式を用いると次式をうる。

$$\log P\cong T\log T-\sum_i\sum_k x_{i,k}\log x_{i,k}+\sum_i\sum_k x_{i,k}\log p_{i,k} \tag{6}$$

ラグランジェの未定乗数を $\mu_j\ (j=1,2,\cdots\cdots,m)$, $\lambda_i\ (i=1,2,\cdots\cdots,l)$ として次のラグランジェ関数をつくる。

$$\phi=T\log T-\sum_i\sum_k x_{i,k}\log x_{i,k}+\sum_i\sum_k x_{i,k}\log p_{i,k}+\sum_j\mu_j\Big(\sum_i\sum_k r_{i,k,j}x_{i,k}-X_j\Big)+\sum_i\lambda_i\Big(\sum_k x_{i,k}-S_i\Big) \tag{7}$$

ϕ を $x_{i,k}$ で偏微分してゼロとおくと，

$$-\log x_{i,k} - 1 + \log p_{i,k} + \lambda_i + \sum_j \mu_j r_{i,k,j} = 0 \qquad (8)$$

よって，次式をうる。

$$x_{i,k} = p_{i,k} e^{\lambda_i - 1} e^{\sum_j \mu_j r_{i,k,j}} = \alpha_i l_{i,k}^{-\beta} e^{\lambda_i - 1} e^{\sum_j \mu_j r_{i,k,j}} \qquad (9)$$

式(9) を式(1)，(2) に代入して次式をうる。

$$\mu_j = \log\left(\frac{e X_j}{\sum_i \sum_k r_{i,k,j} \alpha_i l_{i,k}^{-\beta} e^{\lambda_i} e^{\sum_{g \neq j} \mu_g r_{i,k,g}}} \right) \quad (10), \qquad \lambda_i = \log\left(\frac{e S_i}{\sum_k \alpha_i l_{i,k}^{-\beta} e^{\sum_j \mu_j r_{i,k,j}}} \right) \quad (11)$$

$x_{i,k}$ は陽の形で表わされないので次のような繰り返し計算を行う。

i) λ_i, μ_j の初期値を与える。

ii) 式(10) より μ_j ($j = 1, 2, \cdots\cdots, m$) を計算する。

iii) 式(11) より λ_i ($i = 1, 2, \cdots\cdots, l$) を計算する。

iv) ii)，iii)の計算を λ_i, μ_j が収束するまで続ける。

v) 収束した λ_i, μ_j の値を用いて式(9) より $x_{i,k}$ を求める。

3．配分比条件式との関連

上では先験確率を式(3) のように仮定したがこれを次のような指数関数で仮定しよう。

$$p_{i,k} = \alpha_i e^{-\gamma l_{i,k}} = \alpha_i e^{-\gamma \sum_j r_{i,k,j} l_j} \qquad (12)$$

ここに l_j は区間 j の距離である。この場合，同時確率を最大とする配分交通量は

$$\begin{aligned} x_{i,k} &= \alpha_i e^{\lambda_i - 1} e^{-\gamma \sum_j r_{i,k,j} l_j} e^{\sum_j \mu_j r_{i,k,j}} \\ &= \alpha_i e^{\lambda_i - 1} e^{\sum_j r_{i,k,j} \nu_j} \qquad (ここに，\nu_j = \mu_j - \gamma l_j) \end{aligned} \qquad (13)$$

となる。いま図・1 のようなモデルを考えると，

$$x_{\varphi_1} / x_{\varphi_2} = x_{\varphi_3} / x_{\varphi_4} = e^{\nu_2} / e^{\nu_3} \qquad (14)$$

である。これは先験確率を式(12) のような形で仮定した場合，パスフローは配分比条件式を満足することを表わしている。さらに特殊な場合として，$\gamma = 0$ すなわち先験確率が各ODごとに各経路について等しいとした場合にも配分比条件を満足することは自明である。

4．先験確率式の係数決定法

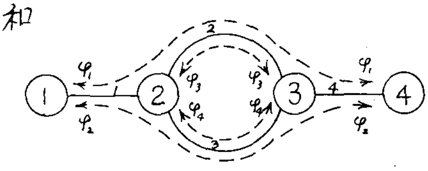
先験確率式中の係数は，実際の観測結果から次のようにして決定することができる。

i) パスフローが観測されている場合

$y_{i,k}$ をOD i パス k の観測交通量として，残差平方和

$$Z = \sum_i \sum_k (y_{i,k} - S_i \alpha_i t_{i,k}^{-\beta})^2 \qquad (15)$$

を最小にするような α_i, β を求める。



図・1　道路網の例

ii) 区間交通量のみが観測されている場合

y_j を区間 j の観測交通量として，残差平方和

$$Z = \sum_j (y_j - \sum_i \sum_k r_{i,k,j} S_i \alpha_i t_{i,k}^{-\beta})^2 \qquad (16)$$

を最小にするような α_i, β を求める。

5．あとがき

ここで述べたパスフローの推定法は等時間原則配分の場合のみならず，総所要時間最小化原則配分の場合，あるいは区間交通量が観測されている場合におけるパスフローの推定などにも応用することができる。