カット不等式を用いた交通量配分

金沢大学　正員　飯田恭敬
京都大学　正員　井上博司
同　学生員　○福山正治

Ⅰ. まえがき

最近の交通量配分の問題は，フローディペンダントな配分をいかに合理的に行なうかということに集約できる。ここで述べる方法は，独立変数としてリンク交通量をとり，カット不等式を用い，極値問題として定式化したものである。

Ⅱ. カット不等式の説明

カット不等式とは，便宜的につけた名前であるが，「ネットを2分割する真切断集合の要素のリンクに流れる交通量の総和は，2つに分割されたノードの集合の間のOD交通量の総和より大である」を意味する。いま，n；リンク数，m；真切断集合の数，$\overline{K_\ell}$ $(\ell = 1,2,\cdots,m)$；真切断集合，K_ℓ；$\overline{K_\ell}$の要素につけられたサフィクスの集合，V_ℓ, W_ℓ；$\overline{K_\ell}$によって分割されたノードの集合，x_i $(i = 1,2,\cdots,n)$；リンク交通量，X_{jk}；ノード$j-k$間のOD交通量，とすると，カット不等式は，次のようにかける。

$$\sum_{i\in K_\ell} x_i \geq \sum_{j\in V_\ell,\, k\in W_\ell} X_{jk} \quad \text{-----} \ (1)$$

$$(\ell = 1,2,\cdots,m)$$

また，x_iは正でなくてはならないから，$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$とすると，次式も条件として加えておく。

$$\mathbf{x} \geq 0 \quad \text{-------} \ (2)$$

以下，すべてのOD交通が流れていることと，(1)，(2)式が満されることが同値であることを証明する。説明を簡単にするため，ネットは図1を対象とし，OD交通量は表1で与えられているものを考える。一般の場合も，同じようにいえる。

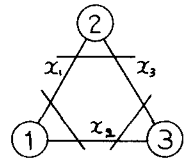

図1

O＼D	1	2	3
1	＼	X_{12}	X_{13}
2		＼	X_{23}
3			＼

表1

証明は2段階にわけて行なうが，変数の非負条件に関する部分は常にいえるので省略して進める。

1．ある特定のODに着目し，そのODに対応するカット不等式が満されることが，そのOD交通が流れていることと，同値であることをいう。

着目するODを1－2とすると，カット不等式は，

$$\begin{cases} x_1^{12} + x_2^{12} \geq X_{12} \\ x_1^{12} + x_3^{12} \geq X_{12} \end{cases} \quad \text{---------} \ (3)$$

となる。ただし，x_i^{jk}においてiはリンク番号でj,kはOD $j-k$に対応する。証明はX_{12}がすべての整数について成立することを帰納法を用いて行なう。

i) $X_{12} = 1$のとき，

$$\begin{cases} x_1^{12} + x_2^{12} \geq 1 \\ x_1^{12} + x_3^{12} \geq 1 \end{cases} \quad \text{--------} \ (4)$$

において，$X_{12} = 1$が流れていれば(4)式が成立することは明らかである。また，この式が成立していると，$X_{12} = 1$が流れていることは，次のように考えればわかる。まず，1のノードと他のノードに分割するカットに着目する。それは(4)の第1式である。これが成立しているわけであるからx_1^{12}, x_2^{12}のいずれか一方は，少なくとも1で

なくてはならない。いまかりに $x_2^{12}=1$ であったとすると、次に、ノード1，3と他のノードを分けるカットに着目する。これは（4）の第2式である。この式もまた満されているわけであるから、x_1^{12}, x_3^{12} のいずれか一方は1でなくてはならない。よって、この場合は証明できたことになる。一般の場合も，連結なネットである限り、最後には、目的となるノードと，その他のノードに分割するカットに到達することになるので、同様にいえる。

ii）$X_{12}=S$ のとき、すなわち、

$$\begin{cases} y_1^{12}+y_2^{12} \geq S \\ y_1^{12}+y_3^{12} \geq S \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots (5)$$

が成立すると仮定し，$X_{12}=S+1$ のとき

$$\begin{cases} z_1^{12}+z_2^{12} \geq S+1 \\ z_1^{12}+z_3^{12} \geq S+1 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots (6)$$

が成立することをいう。ただし，y_i^{12}, z_i^{12} はそれぞれ $X_{12}=S$，$X_{12}=S+1$ のときのリンク交通量であり、次の関係がある。

$$\begin{cases} z_1^{12}=x_1^{12}+y_1^{12} \\ z_2^{12}=x_2^{12}+y_2^{12} \\ z_3^{12}=x_3^{12}+y_3^{12} \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots (7)$$

（4），（5）式が満されていれば、

$$z_1^{12}+z_2^{12} = x_1^{12}+y_1^{12}+x_2^{12}+y_2^{12} \geq S+1$$

同様に

$$z_1^{12}+z_3^{12} \geq S+1$$

となり、（6）式は満される。この逆は成立しないが，ここでは、（6）を満す z_i^{12} に対して，（4），（5），（7）式を満す x_i^{12}, y_i^{12} が少なくとも1つ存在することをいえばよい。これは、次の様に変数変換を行なえばわかる。

$$\begin{cases} a = x_1^{12}+x_2^{12}-1 \\ b = x_1^{12}+x_3^{12}-1 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots (8)$$

$$\begin{cases} p = y_1^{12}+y_2^{12}-S \\ q = y_1^{12}+y_3^{12}-S \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots (9)$$

$$\begin{cases} u = z_1^{12}+z_2^{12}-S-1 \\ v = z_1^{12}+z_3^{12}-S-1 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots (10)$$

とおくと、（4），（5），（6），（7）式は次のようにかける。

$$\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \cdots (11) \quad \begin{cases} p \geq 0 \\ q \geq 0 \end{cases} \cdots (12)$$

$$\begin{cases} u \geq 0 \\ v \geq 0 \end{cases} \cdots (13) \quad \begin{cases} u = a+p \\ v = b+q \end{cases} \cdots (14)$$

z_i^{12} が（6）式を満すようにうごけば、（13）式は満されるが，そうなれば，（14）式を満す a，b，p，q の中で（11），（12）式を満すものは、少なくとも1つは存在する。よって（4），（5）式を成立させる x_i^{12}, y_i^{12} は見つけ出し得る。

以上のことから、すべての X_{12}（≥ 0）に対して題意が証明できたことになる。他のODに関しても同様にいえる。

2．各ODに着目したカット不等式がすべて満たされることと、リンク交通量を変数としたカット不等式が、OD交通をすべて流すという意味において、同値であることを証明する。

各ODに着目したカット不等式を上げると次のようになる。

$$\begin{cases} x_1^{12}+x_2^{12} \geq X_{12} \\ x_1^{12}+x_3^{12} \geq X_{12} \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots (15)$$

$$\begin{cases} x_1^{13}+x_2^{13} \geq X_{13} \\ x_2^{13}+x_3^{13} \geq X_{13} \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots (16)$$

$$\begin{cases} x_1^{23}+x_3^{23} \geq X_{23} \\ x_2^{23}+x_3^{23} \geq X_{23} \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots (17)$$

また、リンク交通量を変数としたものは

$$\begin{cases} x_1+x_2 \geq X_{12}+X_{13} \\ x_1+x_3 \geq X_{12}+X_{23} \\ x_2+x_3 \geq X_{13}+X_{23} \end{cases} \quad \cdots\cdots (18)$$

となり、

$$x_1 = x_1^{12}+x_1^{13}+x_1^{23}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_2^{12} + x_2^{13} + x_2^{23} & \cdots\cdots\cdots (19) \\ x_3 = x_3^{12} + x_3^{13} + x_3^{23} & \end{cases}$$

の関係がある。

(15)，(16)，(17)，(19)より

$$x_1 + x_2 = x_1^{12} + x_1^{13} + x_1^{23} + x_2^{12} + x_2^{13} + x_2^{23}$$
$$\geq X_{12} + X_{13}$$

他も同様

$$x_1 + x_3 \geq X_{12} + X_{13}$$
$$x_2 + x_3 \geq X_{13} + X_{23}$$

となり，必要条件は証明される。この場合も逆はいえないが，前と同様(18)式を満すx_iに対して，(15)，(16)，(17)，(19)を満すx_i^{jk}が少なくとも1つ存在することをいえば良い．これも次のような変数変換を行なえばわかる。

$$\begin{cases} a = x_1^{12} + x_2^{12} - X_{12} & \cdots\cdots (20) \\ b = x_1^{12} + x_3^{12} - X_{12} & \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = x_1^{13} + x_2^{13} - X_{13} & \cdots\cdots (21) \\ d = x_2^{13} + x_3^{13} - X_{13} & \end{cases}$$

$$\begin{cases} e = x_1^{23} + x_3^{23} - X_{23} & \cdots\cdots (23) \\ f = x_2^{23} + x_3^{23} - X_{23} & \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = x_1 + x_2 - X_{12} - X_{13} & \\ v = x_1 + x_3 - X_{12} - X_{23} & \cdots\cdots (24) \\ w = x_2 + x_3 - X_{13} - X_{23} & \end{cases}$$

とおくと，各条件は次の様になる。

$$\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \cdots (25) \qquad \begin{cases} c \geq 0 \\ d \geq 0 \end{cases} \cdots (26)$$

$$\begin{cases} e \geq 0 \\ f \geq 0 \end{cases} \cdots (27) \qquad \begin{cases} u \geq 0 \\ v \geq 0 \\ w \geq 0 \end{cases} \cdots (28)$$

$$\begin{cases} u = a + c + x_1^{23} + x_2^{23} & \\ v = b + e + x_1^{13} + x_3^{13} & \cdots\cdots (29) \\ w = d + f + x_2^{12} + x_3^{12} & \end{cases}$$

さて，x_iが(18)式を満すようにうごけば，(28)式が成立する。よって(29)式を満すa，b，c，d，e，fで(25)，(26)，(27)を満たすものを少なくとも1つは見いだしうる。従って，(15)，(16)，(17)，(19)を満すx_i^{jk}が少なくとも1つ存在する。

以上によって，カット不等式が満されていることと，すべてのOD交通が流れていることが同値であることがわかったが，式の形から，x_iがある一定の値より大であれば，いくら大きくてもかまわないことになる。このときには，無駄な交通，すなわち，ODを満すこととは無関係な交通をも含まれていることになる。これに対しては，x_iが(1)，(2)式で構成される領域の境界上にあれば，無駄な交通は発生していない。これは次のようにして証明できる。いま，境界上にあるにもかかわらず，x_iに無駄な交通が発生していると仮定する。そうすれば，x_iからその無駄なものを取り除いても不等式が犯されることはない。ところが，x_iは境界上にあるから，x_iのすべての要素は，少なくとも1回は等式で成り立っている式に含まれていなければならない。すると当然，x_iを含んでいる式は，x_iを減少させることによって，満されなくなり，矛盾を生じる。これは最初の仮定がまちがっていたにほかならない。よって境界上にある限り，無駄な交通は発生していないことになる。

しかし，この逆は一般には言えない。すなわち，無駄な交通が発生していなくても，x_iが境界上にあるとは限らない。これは，OD交通の中に，所要時間が最小とならない経路を選んだものが含まれているときなどに生じている。

Ⅲ. 配分のアルゴリズム

さて，（1），（2）式の条件のもとである目的関数を最適にするわけであるが，（1）の式数は非常に多くなり，最適化の段階ですべてを考慮することは不可能である。しかし，この数は，最短経路配分を考えることによって，大幅に減少させ得る。すなわち，フローディペンダントな配分を行なったとき，等式で成立する条件は，最短経路に配分したときの等式で成立する条件に含まれると期待される。これが必ずしも成立しないことは極端な例を上げることによって示されるが，このようなことはほとんど生じない。以上のことから，アルゴリズムの大まかな流れ図は図2のようになる。

Ⅳ. あとがき

最適化の手法としては，制限式が線形であること，解が必ず境界上にあることなどから，勾配射影法が比較的良いようである。しかし，まだ，目的関数が変数分離であることや，制限式の係数が0，または1であることなどの特殊性を活かすことができず，今後の課題として残されている。

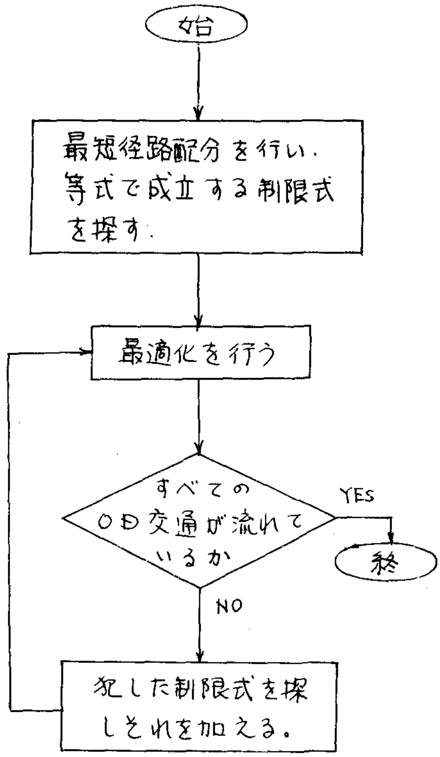

図 2