ネットワークにおけるカットに関する一考察

大阪市立大学工学部　正員　西村　昂
大阪市立大学工学部　正員　○岡村治子

1. はじめに

交通網の解析や計画において、またネットワークによる工程管理の問題等においてカットセットは有効な概念として広く利用されている。ここではカットセットを求める方法について考察した。ネットワークのサイクルを求めるアルゴリズム(1),(4)を変形して極小カットセットを求めるアルゴリズムを与える。Vを有限集合、$E \subset \{\{u,v\} \mid u, v \in V,\ u \neq v\}$とするとき$G = \langle V, E \rangle$をネットワーク（又はグラフ）とよぶ。$V$の元を点、$E$の元を辺とよぶ。カットセットとは$G$からそれを除くと非練結になる辺のある集合をいう。カットセット全体は$A + B = (A \cup B) - (A \cap B)$で和を定義して体$\{0,1\}$上のベクトル空間を作る。（カットセット空間とよぶ）Gの木Tに対してTの各辺と$E-T$の部分集合でただ一つの極小カットセットがきまる。この極小カットセット全体からなる集合はカットセット空間の基底になっている(（2）参照)。この基底を基本基底とよぶ。本稿ではGの incidence matrix からカットセット空間の基本基底を求めるアルゴリズム1とその基底からすべての極小カットセットを生成するアルゴリズム2を与える。以下数値計算はすべて mod2 でおこなう。

2、連結ネットワークのカットセット空間の基本基底の求め方

行に点を列に辺を対応させて0, 1よりなる incidence matrix Aをつくる。点と辺の順序を適当に入れかえて incidence matrix を次の形にできる。$A^* = \begin{pmatrix} A_{11}, & A_{12} \\ A_{21}, & A_{22} \end{pmatrix}$ ここでA_{11}は木をあらわす

このときカットセット空間の基本基底は$B_f = (I,\ A_{11}^{-1} A_{12})$の行ベクトルであらわされる。ここで$I$は単位行列、$B_f$の列は$A^*$の列と同じ辺に対応するとする。（(3)参照）

3、アルゴリズム1

incidence matrix Aからはじめる（Gは連結でn点をもつとする）

step 1　任意の順序で各列に対して（今才j列とする）前もって選ばれていない行で才j列に1を含む行があればそれを選ぶ。もし才i行が選ばれたら、才j列に1を含むすべての他の行を才i行との和でおきかえる。

step 2　step 1が完了したら基本基底は$(0, 0, \cdots, 0)$でない行で与えられる。

証明　Aの rank は$n-1$で丁度$n-1$列が step 1で選ばれそれらが木に対応する。step 1で1行は$(0, 0, \cdots, 0)$になる。これを見るために step 1のあと才i行を除くことによって step 1を変形する。新しい作用は各列が1を2ヶ又は0ヶ含むという性質を保つ。よって2行が残ったときそれらは同じで1つを選ぶと他方は$(0, 0, \cdots, 0)$になる。step 1のあと$(n-1)$単位行列が左上にくるようにAの行と列を置換できる。これと同じ置換が最初の行列Aになされたら$A^* = \begin{pmatrix} A_{11}, & A_{12} \\ A_{21}, & A_{22} \end{pmatrix}$の形になる。よって step 1の結果は$\begin{pmatrix} 1, & A_{11}^{-1} A_{12} \\ 0, & 0 \end{pmatrix}$である。

4、アルゴリズム2

基本基底 $B_1, B_2, \cdots, B_{n-1}$ からはじめる。B_iは辺の集合とする。$i=1,2,\cdots,n-1$

step 1　$S=\{B_1\}$, $Q=\{B_1\}$, $R=\phi$, $R^*=\phi$, $i=2$ とする

step 2　Qのすべての元Tに対して、もし $T\cap B_i \neq \phi$ なら $T+B_i$をRに入れる。
もし $T\cap B_i = \phi$ なら $T+B_i$をR^*に入れる。

step 3　$R \ni {}^\forall U, {}^\forall V$に対して、もし $U \subset V$ なら $R=R-\{V\}$, $R^*=R^*\cup\{V\}$ とおく。

step 4　$S=S\cup R\cup\{B_i\}$ とおく

step 5　$Q=Q\cup R\cup R^*\cup\{B_i\}$ とおき $R=\phi$, $R^*=\phi$ におきなおす。

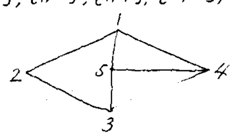
step 6　$i=i+1$ とおき $i \leq n-1$ なら step 2にもどる。$i>n-1$ なら stop
このときSはすべての極小カットセットからなる。

iの step 5でQは$B_1, B_2, \cdots, B_i$のすべての一次結合からなる。それらとB_{i+1}の和で極小でないものを$i+1$の step 2, step 3 によってR^*に集めSから除いている。

5. 例

$G=\langle V,E\rangle$, $V=\{1,2,3,4,5\}$, $E=\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,5\},\{1,5\},\{1,4\},\{4,5\},\{3,4\}\}$を考える。

Incidence matrix は
$$A=\begin{pmatrix} 1&0&0&1&1&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&1&1&0&1&0 \end{pmatrix},$$



図

アルゴリズム1をおこなう

第1列に対して第1行を選び、第2列に対して第2行を選び、第3列に対して第3行を選び第6列に対して第4行を選ぶと

$$A\to\begin{pmatrix} 1&0&0&1&1&0&0\\ 0&1&0&1&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&1&1&0&1&0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1&0&0&1&1&0&0\\ 0&1&0&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&1&1&0&1&0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1&0&0&1&1&0&0\\ 0&1&0&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&1&1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1&0&0&1&1&0&0\\ 0&1&0&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

基本基底は $B_1=\{1,4,5\}$, $B_2=\{2,4,5\}$, $B_3=\{3,4,5,7\}$, $B_4=\{5,6,7\}$

アルゴリズム2をおこなう。

$i=2$で　$S=Q=\{B_1, B_1+B_2=\{1,2\}, B_2\}$

$i=3$で　$R=\{B_1+B_3=\{1,3,7\}, B_2+B_3=\{2,3,7\}\}$, $R^*=\{B_1+B_2+B_3\}$

$i=4$ step 2で　$R=\{B_1+B_4=\{1,4,6,7\}, B_2+B_4=\{2,4,6,7\}, B_1+B_3+B_4=\{1,3,5,6\}, B_3+B_4=\{3,4,6\}$
$B_2+B_3+B_4=\{2,3,5,6\}, B_1+B_2+B_3+B_4=\{1,2,3,4,6\}\}$, $R^*=\{B_1+B_2+B_4\}$

step 3で　$R=R-\{B_1+B_2+B_3+B_4\}$, $R^*=R^*\cup\{B_1+B_2+B_3+B_4\}$

step 6で　$S=\{B_1, B_1+B_2, B_2, B_1+B_3, B_2+B_3, B_3, B_1+B_3, B_2+B_4, B_1+B_3+B_4, B_3+B_4$
$B_2+B_3+B_4, B_4\}$

参考文献 (1) Gibbs Norman E. Cycle generation algorithm for finite undirected linear graphs Journal Association Computer Machinery 16 (1969) 564−568

(2) Harary F. Graph Theory Addison-Wesley Reading. Mass., (1969) 38−39
又は フランク・ハラリイ著 池田貞雄訳 グラフ理論 共立出版社 56−57

(3) Seshu S., And Reed, M.B. Linear Graphs and Electrical Networks, Addison-Wesley Reading Mass., (1961) 76

(4) Welch, J.T.Jr A mechanical analysis of the cyclic structure of undirected linear graphs, J. Assoc. Comp. Mach. 13 (1966) 205−222