

神戸大学工学部 正員 桜井 春輔

神戸大学大学院・学生員 ○梶 太郎

1. はしがき

無限に広い均質な弾性地山中の円形トンネルに、せん断波（地震時）及び、粗密波（発破時）が作用した場合のトンネルの動的解析に関する研究は、覆工のない場合または覆工が剛体である場合の研究はすでに、Yih-Hsing Pao¹⁾や、岡本舜三博士²⁾によってなされている。しかし、覆工が可撓可縮性を有する場合の動的解析は未だ発表されていないので、トンネル覆工と地山がつねにはなれることがなく、同じ振動状態にあるという仮定のもとで解析をおこなう。なお、ここでは粗密波の場合について述べる。

2. 基礎方程式の誘導

円振動数 ω が与えられている定常振動状態における変位、応力は次式で表わされる。

$$u_r = \bar{u}_r e^{i\omega t}, \quad u_\theta = \bar{u}_\theta e^{i\omega t} \quad (1)$$

$$\sigma_r = \bar{\sigma}_r e^{i\omega t}, \quad \sigma_\theta = \bar{\sigma}_\theta e^{i\omega t}, \quad \tau_{r\theta} = \bar{\tau}_{r\theta} e^{i\omega t} \quad (2)$$

ここで、 $\bar{u}_r, \bar{u}_\theta, \bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_\theta, \bar{\tau}_{r\theta}$ は r と θ の複素関数である。又、変位の scalar potential ϕ , vector potential ψ についても次式で表わされる。

$$\phi = \bar{\phi} e^{i\omega t}, \quad \psi = \bar{\psi} e^{i\omega t} \quad (3)$$

ここで、 $\bar{\phi}, \bar{\psi}$ は r と θ の関数である。故に、波動方程式より次の Helmholtz の式が導かれる。

$$\nabla^2 \bar{\phi} + k_p^2 \bar{\phi} = 0 \quad (4)$$

$$\nabla^2 \bar{\psi} + k_s^2 \bar{\psi} = 0 \quad (5)$$

ここで、 k_p, k_s は夫々粗密波、せん断波の wave number である。即ち、 $k_p = \omega/C_p$, $k_s = \omega/C_s$ 。但し、 C_s はせん断波の位相速度、 C_p は粗密波の位相速度である。 $C_p = \sqrt{2Gg(1-\nu)/(1-2\nu)\rho}$, $C_s = \sqrt{Gg/\rho}$ 。ここで、 G はせん断弾性定数。 ν はポアソン比。 ρ は単位体積重量。 g は重力定数である。 $\bar{u}_r, \bar{u}_\theta$ は $\bar{\phi}, \bar{\psi}$ で次のように表わされる。

$$\bar{u}_r = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \theta} \quad (6)$$

$$\bar{u}_\theta = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \theta} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} \quad (7)$$

$\bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_\theta, \bar{\tau}_{r\theta}$ は $\bar{\phi}, \bar{\psi}$ で次のように表わされる。ここに、 $k = C_p/C_s = k_s/k_p = \sqrt{2(1-\nu)/(1-2\nu)}$ 。

$$\bar{\sigma}_r = G \left[k^2 \nabla^2 \bar{\phi} - 2 \left(\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \theta^2} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{\psi}_r - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} \right) \right] \quad (8)$$

$$\bar{\sigma}_\theta = G \left[k^2 \nabla^2 \bar{\phi} - 2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \theta^2} \right] \quad (9)$$

$$\bar{\tau}_{r\theta} = G \left[\nabla^2 \bar{\psi} - 2 \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{\phi}_r - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} \right) \right] \quad (10)$$

3. 入射波と屈折波と反射波

無限に広い弾性地山中を x 軸の負方向に向かってすすんでくる入射粗密波（図-1）は次のように表わされる。

$$\phi_U^{(i)} = \phi_0 e^{i(k_p x + \omega t)}, \quad \psi_U^{(i)} = 0 \quad (11)$$

ここに、 ϕ_0 は変位 scalar potential の振幅。 k_p は弾性地山における粗密波の wave number である。故に、 $\bar{\phi}_U^{(i)}$ は極座標で次のように表わされる。

$$\bar{\phi}_U^{(i)} = \phi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n(\epsilon_p^U r) \cos n\theta \quad (12)$$

ところで、 J_n は n 次のBessel関数を表わし、 ϵ_n は $n=0$ のとき1で、 $n \geq 1$ のとき2である。

覆工の中心がちょうど極座標の原点と一致しているとき(図-1)、その覆工に入射波がすすんでくると、先ず入射波の一部は、覆工外周即ち $r=a$ の境界で反射され、残りは屈折波となってトンネル覆工中をすすむ。そして、その屈折波は覆工内周即ち $r=b$ の境界で反射され、更にその反射波は $r=a$ の境界で反射されたり屈折されたり、更にその反射波は……というように波は伝わっていく。これらの反射波、屈折波のうち原点の外側に向か、てすすむ波即ち発散波は弾性地山中では

$$\bar{\phi}_U^{(a)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(2)}(\epsilon_p^U r) \cos n\theta, \quad \bar{\psi}_U^{(a)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n H_n^{(2)}(\epsilon_p^U r) \sin n\theta \quad (13)$$

又、覆工中では

$$\bar{\phi}_L^{(a)} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n H_n^{(2)}(\epsilon_p^L r) \cos n\theta, \quad \bar{\psi}_L^{(a)} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n H_n^{(2)}(\epsilon_p^L r) \sin n\theta \quad (14)$$

ここで、 A_n, B_n, E_n, F_n は積分定数。 ϵ_p^U は弾性地山におけるせん断波のwave number。 $\epsilon_p^L, \epsilon_s^L$ は夫々トンネル覆工における粗密波とせん断波のwave number。 $H_n^{(2)}$ は n 次のHankel第2種関数である。反射波、屈折波のうち原点に向か、てすすむ波は収束波でありトンネル覆工中のみ存在する。

$$\bar{\phi}_L^{(c)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(\epsilon_p^L r) \cos n\theta, \quad \bar{\psi}_L^{(c)} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n H_n^{(1)}(\epsilon_p^L r) \sin n\theta \quad (15)$$

ここで、 C_n, D_n は積分定数。 $H_n^{(1)}$ は n 次のHankel第1種関数を表わしている。結局、弾性地山中での変位potentialは、 $\bar{\phi}_U = \bar{\phi}_U^{(c)} + \bar{\phi}_U^{(a)}$, $\bar{\psi}_U = \bar{\psi}_U^{(c)} + \bar{\psi}_U^{(a)}$ 。トンネル覆工中の変位potentialは、 $\bar{\phi}_L = \bar{\phi}_L^{(c)} + \bar{\phi}_L^{(a)}$, $\bar{\psi}_L = \bar{\psi}_L^{(c)} + \bar{\psi}_L^{(a)}$ 。

4. 境界条件とトンネル周辺の変位、応力

トンネル覆工と地山が半径方向と円周方向にはなれることがないと仮定すれば、 $r=b$ において

$$\bar{\sigma}_{rL} = 0, \quad \bar{\tau}_{\theta L} = 0 \quad (16)$$

$r=a$ において

$$\bar{u}_{rL} = \bar{u}_{rU}, \quad \bar{u}_{\theta L} = \bar{u}_{\theta U}, \quad \bar{\sigma}_{rL} = \bar{\sigma}_{rU}, \quad \bar{\tau}_{\theta L} = \bar{\tau}_{\theta U} \quad (17)$$

以上6つの境界条件がえられ、積分定数 $A_n, B_n, \dots, F_n$ が決定できる。この積分定数よりトンネル周辺の変位及び応力が求まる。数値計算の結果はおいて発表する。

参考文献

1) Y.H.Pao and C.C.Mow: "Dynamic Stress Concentration in an Elastic Plate with Rigid Circular Inclusion," Proceedings of the Fourth U.S. National Congress of Applied Mechanics, ASME, 1962, PP335

Y.H.Pao: "Dynamical Stress Concentration in an Elastic Plate," Journal of Applied Mechanics, vol 29, No.2, Trans, ASME, vol 84, Series E, June 1962, PP299~305.

2) 岡本舜三他: "地中構造物に働く地震力に関する研究", 土木学会論文集、第92号、昭和38年4月。

