Ⅲ－8

砂のような粒状体の変形に関する一考察

大阪市立大学工学部　正　員　三瀬　貞

大阪市立大学工学部　正　員　山田　優

大阪市立大学大学院　学生員○真嶋光保

1. はじめに

構造用材料に対して，それがどのような力学特性を有するのか，ということを知ることは構造物の設計をはじめ，種々の点で重要な役割を担うものと考えられる。しかし，材料の力学特性は実験によって決定するしかないのが現状である。今，粒状体を考える時このような観点から離れて，単に粒子の集合を考え，統計熱力学的な面から，変形の基礎となるものを粒子接触点でのエネルギーの伝達としてとらえ，典型的な力学関係を示す，応力－ひずみ関係を得ようとしたものである。

2. 考え方の基本

粒子系の変形は，構成粒子の相対的な位置の変化と考えられる。とすると古典力学的には粒子の1つ1つに番号を符し，その個々について自由度に等しいだけの釣り合い方程式ないし運動方程式を作り，それにともなう適合条件と，任意の初期条件，境界条件のもとに演算を行えば系のその後の情報，すなわち変形過程を論じることは原理的には可能である。しかしこれはあくまで原理であって，実際には莫大な自由度を扱うこととなり労力その他の面から見ても不可能である。従ってこのような常とう手段では解くことはできないから，多数であるということを積極的に利用することにより，完全な因果律に従う力学を，確率的な偶然性を含む論理とすりかえる。この段階でエルゴードの仮定が成り立つものとした。そして与えられた状態のうちで最も多数の微視状態，すなわち最も大きい確率をもった微視状態（力学状態）というものを考え，これに基づいた巨視的な物理状態量を受けとることにするわけである。

3. 応力－ひずみ関係式の誘導 *

上記の考え方に基づいて熱力学におけるGibbsの自由エネルギーから次のような展開をする。

$$G = E + pV - TS \qquad (1)$$

$$dG = dE + pdV + Vdp - TdS - SdT$$
$$= -Xdx + Vdp - SdT \qquad (2)$$

ここに $dE = TdS - Xdx - pdV \qquad (3)$

よって

$$X = -\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{p,T} \qquad (4)$$

G: Gibbsの自由エネルギー
E: 系の内部エネルギー
p: 〃 圧力
V: 〃 体積
T: 絶対温度
S: エントロピー
X: 外力（外部変数）
x: 外力による応答（変形）

粒子数N，圧力 p，温度Tで指定される平衡状態を取扱う時は，その条件のもとに系の体積が V であり，エネルギーが E_r の状態をとる確率が，

$$P = \frac{1}{Y}\exp\left(-\frac{pV + E_r}{kT}\right) \qquad (5)$$

であらわされる統計集合を導入する。ここでYは規格化条件により決められる。

$$Y=\int_0^{\infty} dV \exp\left(-\frac{pV}{kT}\right)\sum_r \exp\left(-\frac{E_r}{kT}\right) \qquad (6)$$

このYとGibbsの自由エネルギーは、

$$G=-kT\log Y \qquad (7)$$

で関係づけられる。このようにYが最も重要な関数であるが、系として妥当な仮定を導入しこれを決め、最後に(4)式による演算を行い、最終的に指数関数式

$$X=a(1-e^{-bx}) \qquad (8)$$

を得た。この式で単位面積、単位体積を考えることにより、Xは応力、xはひずみと考えられる。また係数a, bは各々次式による。

$$a=\frac{NZ\mu}{z}\exp\left(-\frac{N\alpha}{kT}\right) \qquad (9)$$

$$=NkT\frac{\partial \log\left(\frac{Ap}{1+e}\right)}{\partial x}+\frac{p\,\partial V}{1+e} \qquad (10)$$

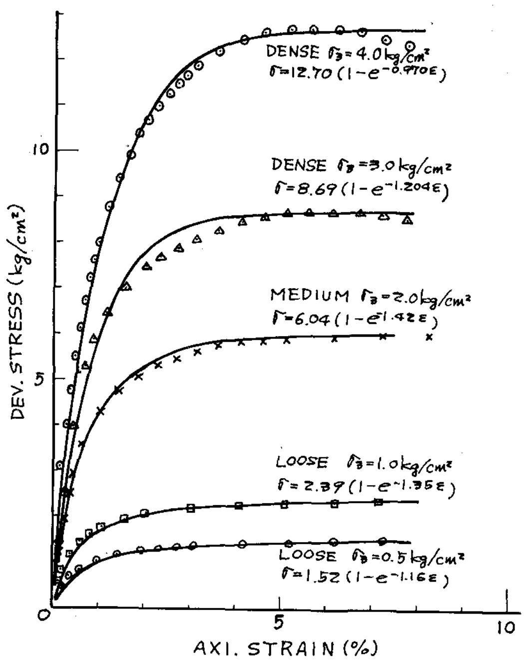
$$b=\frac{NZ\mu}{zkT} \qquad (11)$$

Z：粒子の接点数、
μ：粒子間の摩擦係数、
α：粒子1個が受けるポテンシャルエネルギー
A：粒子の構造により決る常数、
e：間ゲキ比、
k：ボルツマン常数。

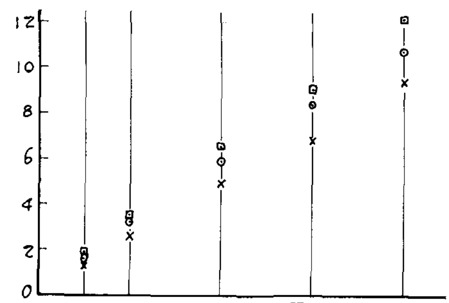
4．実験

応力－ひずみ関係式を導いた後、各条件に応じて係数が決定されるが、現段階では計算しえないので、ひとまず実験により係数を決めることにした。実験は、乾燥した豊浦標準砂を用いて三軸圧縮試験を行った。図－1で示した対応は、一例であるが、これから解るように、粒状体の応力－ひずみ関係はいままで、いくつかの論文で指摘されているように(8)式のような指数関数式で十分近似される。係数a、b、axbと各実験条件との関係を図－2, 3, 4に示す。axbは$\left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$より求められ、初期接線弾性係数をあらわす。

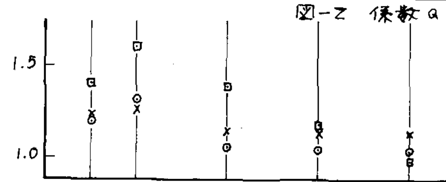
＊参考文献：岩村国也「固体の統計力学」



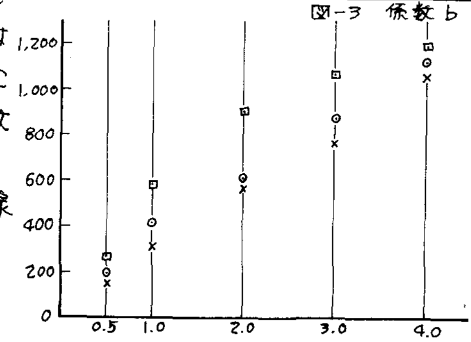
図－1 実験データの数式化



図－2 係数 a



図－3 係数 b



図－4 a×b (×100)