Ⅱ－20

ＭＡＣ法による二成層流の解析について

京都大学工学部　正　員　岩佐義朗
京都大学大学院　学生員○田中伸和
清　水　建　設　正　員　久保田年久

1. まえがき

近年，大容量の高速電子計算機が広汎に用いられるようになり，計算方法およびプログラムの管理・運用のためのソフト・ウェアの開発が，水理学における研究テーマになりつつある。しかし，数値シミュレーションにおいては，具体的な数値を与えて，はじめて，その結果が得られるので，現象の定性的性質を知りえないし，また，得られた結果が，種々の誤差のために，はたして，もとの方程式－物理法則－の正しい近似解であるかどうかの判定，およびその誤差量を評価することは，きわめてむずかしい問題である。

そのため，本研究では，1960年代中期に開発された“ＭＡＣ法”[1]のプログラム作成，およびその収束性について若干の吟味をおこない，それを水理学の種々の問題の解析に適用させようとしたものである。

2. 数学モデル

水理学で，流れの挙動を解析するには，密度および粘性係数をどのように仮定するかによって，種々の数学的表現式が得られる。

(Ⅰ)　水を対象とする単層流では，密度および粘性係数を一定と仮定して十分であるので，その数学モデルは，

$$\frac{DU_i}{Dt} = F_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\nabla^2 U_i \quad (i=1,2,3) \qquad ①$$

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0 \qquad ②$$

になり，

(Ⅱ)　境界面で，混合を生じないような淡・塩水の二成層流では，密度および粘性係数の値が，境界面の上下で急変するので，その数学モデルは，

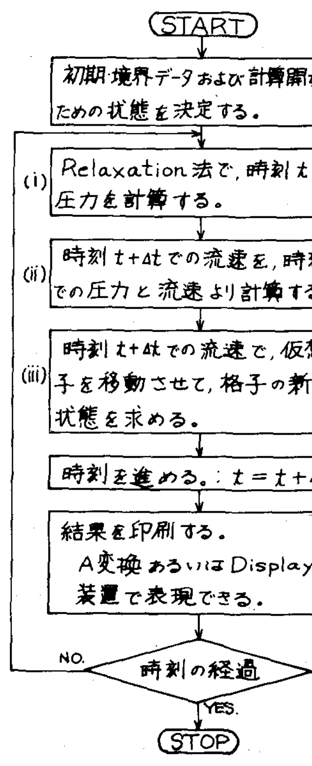
$$\rho\frac{DU_i}{Dt} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)\right] \quad (i=1,2,3) \qquad ③$$

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0 \qquad ④$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \qquad ⑤$$

になる。

ここで，D/Dt：Lagrange微分，∇^2：Laplace演算子，U_i：x_i軸方向の流速，F_i：x_i軸方向の外力，ρ：密度，μ：粘性係数，



図－1

ν：動粘性係数である。

3. 数値計算法

MAC法の計算手順を示すと，図－1のようになる。(i)では，①,②式あるいは，③,④,⑤式から，圧力pに対するPoisson型の方程式を作り，境界条件が満足されるように，Relaxation法でもってpの値を求める。この場合，(II)では，Source termに密度の変化が表われるので，(I)とは，異なる方法で解析する必要がある。(ii)では，(i)で求まったpと，すでに求まっている流速より，新しい時刻での流速を求める。(iii)では，(ii)で求まった流速で，仮想粒子を移動させて，粒子の新しい位置を定めて，流況の変化を求める。すなわち，これらのステップを，くり返しておこなえば，不定流の流況を解析することができる。

4. 結果と考察

(I)の数値シミュレーションでは，解析する現象の流況の変化が少ない場合だけ，きわめて，実際現象と似た流況の変化が得られたが，流速の変化が大きくなるような現象の解析に対しては，よい結果が得られなかった。これは，①式の差分表示式(explicit型)の安定性によるものと思われる。Chan[2]らは，MAC法の安定性は，流速の平均化の方法の粗雑さに原因するものとして，Hirtが得た安定性の条件[3]

$$\delta x^2 < \frac{2\cdot\nu}{\underset{x}{\mathrm{Max}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)} \;,\quad \delta y^2 < \frac{2\cdot\nu}{\underset{y}{\mathrm{Max}}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)} \;,\quad 2\cdot\nu\cdot\delta t < \frac{\delta x^2\cdot\delta y^2}{\delta x^2+\delta y^2} \qquad ⑥$$

を用いて，吟味をおこなっている。なお，①式を線型化すれば，収束の十分条件として，

$$\delta x < \frac{2\cdot\nu}{\underset{x}{\mathrm{Max}}(u)} \;,\quad \delta y < \frac{2\cdot\nu}{\underset{y}{\mathrm{Max}}(v)} \;,\quad 2\nu\cdot\delta t < \frac{\delta x^2\cdot\delta y^2}{\delta x^2+\delta y^2} \qquad ⑦$$

が得られた。ここで，δx，δy，δtは，それぞれ，x,y,t軸方向の格子間隔である。

したがって，流速が大きく変化するような現象の数値シミュレーションに対しては，安定性の条件が満たされにくくなり，累積誤差が増大すると考えられ，結局，格子間隔は，ν，$1/\mathrm{Max}(u)$，$1/\mathrm{Max}(\partial u/\partial x)$，などの値の大きさによって，制限されるものと思われる。

(II)のモデルに対しては，流体の流出入をも考慮に入れて計算をおこなったが，(I)の場合と同様，流速が大きく変るような境界条件（たとえば，下層取水，上層取水など）には，よい結果が得られなかった。この場合の安定性もやはり，(I)の場合と同様に，ν，$\mathrm{Max}(u)$，$\mathrm{Max}(\partial u/\partial x)$などの値の大きさで，きまるものと思われる。なお，Relaxation法としては，S.O.R.法を用い，加速係数としては，1.7～1.8が最適となることが分った。

今後は，流速の平均化の方法の改良，およびimplicit型の差分式によって，安定性のよいシミュレーション法を開発し，適用範囲を広めたいと思う。

1) Welch, C.E.："The MAC Method", Los Alamos Scientific Laboratory, Univ. of California, (1966)
2) Chan, K.C.："Computer Studies of Finite Amplitude Water Waves", Tech. Report No. 104, Stanford Univ., (1969)
3) Hirt, C.W.："Heuristic Stability Theory for Finite Difference Equations", J. Computational Physics, 2, 239, (1968)