砂の拡散輸送問題への有限要素法の適用

神戸大学工学部　学生員　　○岩田　潔
神戸大学大学院　学生員　　神吉和夫
神戸大学工学部　正　員　工博　松梨順三郎

1．まえがき

有限要素法は，元来，構造解析の手法として発展してきたものであるが，その基本原理が"極値原理に基礎をおく数学的近似解法"であることが認識されるに到り，浸透問題等の非構造分野にも応用されるようになった。ここでは，二次元場における砂の拡散輸送問題への適用を考えることにする。

2．基礎方程式

問題のモデルとして，図-1に示す二次元流れの場を考え，現象が定常で，流れが等流であり，砂粒子の沈降速度が一定であると仮定すると，質量保存の法則により砂の拡散輸送に対する基礎方程式は次のように表わされる。

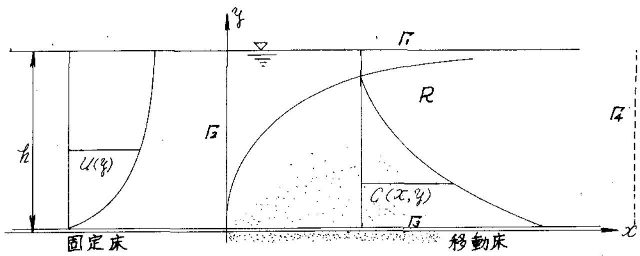


図-1

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial C}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_y\frac{\partial C}{\partial y}\right)-U\frac{\partial C}{\partial x}+W_f\frac{\partial C}{\partial y}=0 \qquad (1)$$

境界条件として，

自由　水面 ；	Γ_1上	$y=h$	$D_y\frac{\partial C}{\partial y}+W_fC=0$	(2−1)
移動床の始点の断面；	Γ_2上	$x=0$	$C=0$	(2−2)
移動床の近傍 ；	Γ_3上	$y=a\cdot h$	$C=C_a=const.$	(2−3)
下流の断面 ；	Γ_4上	$x=b\cdot h$	$\frac{\partial C}{\partial x}=0$	(2−4)

ここで，Cは濃度，Uはx方向の流速成分，W_fは砂粒子の沈降速度，D_x，D_yは各々x，y方向の拡散係数，hは水深を表わす。境界Γ_1，Γ_2，Γ_3，Γ_4で囲まれた領域をRとし，領域RをM個の三角形要素R_m（$m=1,2,\cdots,M$）に分割しても，基礎方程式(1)はそれぞれの三角形要素で満足される。

3．変分原理と有限要素法による解法

分割された各三角形要素内で，パラメータU，D_x，D_yが一定値をとると考えると，式(1)，(2-1)～(2-4)で与えられる境界値問題は，変分原理によって，次のような汎関数を最小にする関数Cを求める問題と等価となる。

$$\chi=\sum_{m=1}^{M}\iint_{R_m}\exp\beta\left[\frac{D_x}{2}\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)^2+\frac{D_y}{2}\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)^2\right]dxdy+\sum_{k=1}^{K}\int_{\Gamma_{1k}}\frac{1}{2}\exp\beta\cdot W_fC^2\,d\ell \qquad (3)$$

ここで，
$$\beta=-\frac{U\cdot x}{D_x}+\frac{W_f\cdot y}{D_y} \qquad (4)$$

Γ_{1k}は境界Γ_1を含む要素のΓ_1境界辺を表わす。式(3)で与えられる汎関数を境界条件式(2−

2), (2-3)の下で最小化するCの分布を求めれば，得られるCは境界条件式(2-1), (2-4)を満足している。しかし，式(3)のままで解析を進めると，指数項式(4)のため結果として生じるマトリックス要素が数ケタの大きさで変化し，数値計算上不都合なものとなるので，次のような変換式により，指数項を含まない汎関数に変換する。

$$\varphi = C \cdot \exp(\beta/2) \tag{5}$$

式(5)を用いると式(3)は次のようになる。

$$\chi = \sum_{m=1}^{M} \iint_{R_m} \left\{ \frac{D_x}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{D_y}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{U}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{W_f}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\cdot\varphi + \left(\frac{U^2}{8D_x} + \frac{W_f^2}{8D_y}\right)\varphi^2 \right\} dx\,dy$$

$$+ \sum_{k=1}^{K} \int_{\Gamma_{1k}} \frac{1}{2} W_f \cdot \varphi^2 \, dl \tag{6}$$

Γ_2, Γ_3上の境界値は $\varphi = C \cdot \exp(\beta/2)$ で与える。

図-2に示すように領域Rを三角形要素に分割し，各要素内でφの値がx, yに関する一次多項式で表わされると仮定する。

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \tag{7}$$

代表的な三角形要素R_fについて考えると，式(7)が要素の三頂点i, j, mで成立することから，要素内のφの値は節点値φ_i, φ_j, φ_mによって与えられる。同様に，関数φは全領域内で，その節点値により一義的にまた連続的に定義されることになり，結局そのような節点値に関して汎関数χを最小化することが解析の目標となる。その手順として，まずχの微係数に対する各要素の寄与，要素R_fについていえば，例えば$\partial\chi^{R_f}/\partial\varphi_i$などを求める。次に全ての要素についてこのような寄与を求め，その和を0とすれば良い。各要素はその三頂点に関する微係数のみに寄与し，これら三つの寄与を要素R_fについてマトリックスで表示すると

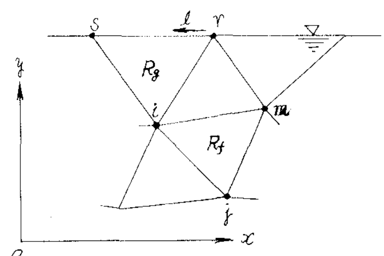


図-2

$$\left\{\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}\right\}^{R_f} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial\chi^{R_f}}{\partial\varphi_i} \\ \dfrac{\partial\chi^{R_f}}{\partial\varphi_j} \\ \dfrac{\partial\chi^{R_f}}{\partial\varphi_m} \end{Bmatrix} = \left[\, h \,\right]^{R_f} \begin{Bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_m \end{Bmatrix} \tag{8}$$

ここで

$$\left[h\right]^{R_f} = \frac{D_x}{4\Delta}\begin{pmatrix} b_i b_i & b_j b_i & b_m b_i \\ & b_j b_j & b_m b_j \\ \text{SYM} & & b_m b_m \end{pmatrix} + \frac{D_y}{4\Delta}\begin{pmatrix} c_i c_i & c_j c_i & c_m c_i \\ & c_j c_j & c_m c_j \\ \text{SYM} & & c_m c_m \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{U}{12}\begin{pmatrix} b_i+b_i & b_i+b_j & b_i+b_m \\ & b_j+b_j & b_j+b_m \\ \text{SYM} & & b_m+b_m \end{pmatrix} - \frac{W_f}{12}\begin{pmatrix} c_i+c_i & c_i+c_j & c_i+c_m \\ & c_j+c_j & c_j+c_m \\ \text{SYM} & & c_m+c_m \end{pmatrix} + \left(\frac{U^2}{8D_x} + \frac{W_f^2}{8D_y}\right)\begin{pmatrix} \frac{\Delta}{3} & \frac{\Delta}{6} & \frac{\Delta}{6} \\ & \frac{\Delta}{3} & \frac{\Delta}{6} \\ \text{SYM} & & \frac{\Delta}{3} \end{pmatrix} \tag{9}$$

ただし Δは三角形要素の面積を表わす。

$b_i = y_j - y_m$　　b_j, b_m は回転順列　　x_i, x_j, x_m は節点 i, j, m の x, y 座標

$c_i = x_m - x_j$　　c_j, c_m は 〃 〃　　y_i, y_j, y_m

境界 Γ_1 を含む要素については，式(6)の右辺第2項の微係数に対する寄与を加えなければならない。図-2の要素 R_g の r-s 面を考えると，φ は φ_r から φ_s へ直線的に変化するから，

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_r}\left\{\int_{rs}\frac{1}{2}W_f\varphi^2 dl\right\} = \frac{W_f L}{3}\cdot\varphi_r + \frac{W_f L}{6}\cdot\varphi_s$$
$$\frac{\partial}{\partial \varphi_s}\left\{\int_{rs}\frac{1}{2}W_f\varphi^2 dl\right\} = \frac{W_f L}{6}\cdot\varphi_r + \frac{W_f L}{3}\cdot\varphi_s \tag{10}$$

従って，要素 R_g における微係数の寄与は

$$\left\{\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}\right\}^{R_g} = \begin{Bmatrix}\frac{\partial\chi^{R_g}}{\partial\varphi_i}\\ \frac{\partial\chi^{R_g}}{\partial\varphi_r}\\ \frac{\partial\chi^{R_g}}{\partial\varphi_s}\end{Bmatrix} = \left[h\right]^{R_g}\begin{Bmatrix}\varphi_i\\ \varphi_r\\ \varphi_s\end{Bmatrix} + \frac{W_f L}{3}\cdot\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varphi_i\\ \varphi_r\\ \varphi_s\end{Bmatrix} \tag{11}$$

全ての要素について微係数の寄与を求め，それを重ね合わせることにより，最小化過程の最終方程式が得られる。節点 i を例にとれば

$$\frac{\partial\chi}{\partial\varphi_i} = \sum_{k}\frac{\partial\chi^{R_k}}{\partial\varphi_i} \tag{12}$$

ただし，総和は考えている節点を頂点として共有する要素のみについて行なえばよい。
領域全体に対してマトリックス表示すると

$$\left\{\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}\right\} = \begin{Bmatrix}\frac{\partial\chi}{\partial\varphi_1}\\ \vdots\\ \frac{\partial\chi}{\partial\varphi_N}\end{Bmatrix} = \left[H\right]\begin{Bmatrix}\varphi_1\\ \vdots\\ \varphi_N\end{Bmatrix} \tag{13}$$

ここで，N は総節点数である。式(13)において φ の値が未知の節点については，最小化の条件により左辺の微係数項は0で与えられる。一方，φ の値が既知の節点（Γ_2，Γ_3 上の節点）に対してはマトリックス〔H〕の対角要素を1とする以外，行の他の係数を全て0とし，対応する左辺に境界値を代入する。この方法により，解くべき方程式の数は増えるが，既知節点値の導入によるマトリックスの再編成をしなくても良いので，計算上便利なことが多い。以上のようにして得られた連立一次方程式(13)を解くことにより，φ の分布が求められ，次のように逆変換することで濃度 C の分布が求められる。

$$C = \varphi\cdot\exp(-\beta/2) \tag{14}$$

4．計算結果

計算結果は次ページ図-3，図-4に示す。パラメータ D_x，D_y 等は次の値を用いた。

$h = 7.62\,cm$　，　$a = 0.04$　，　$b = 29.0$

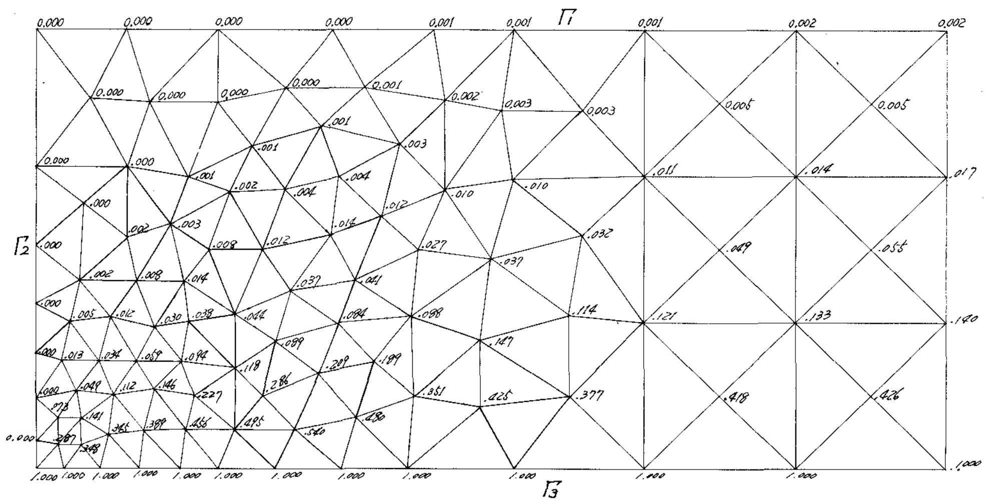
$u = 36.0\,cm/sec$　，　$W_f = 1.5\,cm/sec$

$D_x = 100 \times D_y$　，　$D_y = 2.286\,cm^2/sec$

〔参考文献〕

1. O.C.ツィエンキーヴィッツ/Y.K.チューン共著“マトリックス有限要素法”培風館

2. G.L.Guymon, V.H.Scott, and L.R.Herrman " A General Numerical Solution of the Two-Dimensional Diffusion - Convection Equation by the Finite Element Method " Water Resour. Res. Dec. 1970



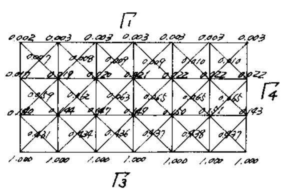


図-3 要素分割及び計算結果

上図の右端の節点と左図の左端とは同じ節点である。

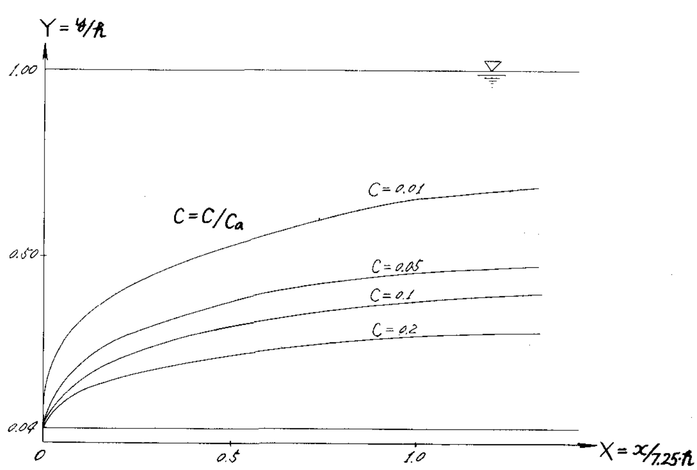


図-4 等濃度曲線