

京都大学工学部 正員 岩佐 義朗  
 京都大学工学部 正員 常松 芳昭  
 大林組 尾園 幸昭

### 1. はじめに

管路による流体輸送システムは、天然ガス、石油の輸送に大いに利用されているが、水資源の高度利用が叫ばれている今日、水の輸送、流量配分に対してより一段と利用されるものと思われる。これには、ネットワーク・システムと貯水池間の水輸送の例にみられる管路の分岐・合流、すなわちトリートメント・システムの二つがある。本文は後者における非定常流れの解析法、およびそのモデル・ケースへの適用について述べようとするものである。

### 2. 管路システムと有向グラフ

一般に、ある物理系に関してキルヒホッフの第一、第二法則に従う二つの状態変数があり、しかも両者の間に関数関係がある場合には、その物理系全体に関する本質的な情報を導き出すのに有向グラフを利用することができる<sup>1)</sup>。実際、管路輸送システムの場合、状態変数に流量とエネルギー高さを選べば、管路接合部を節点に、管路を枝に対応させ、流体の流れを枝の向きに結びつければ、有向グラフの構造と性質はこの種の問題に対する一つの有用なモデルになる。一方、管路システムにおける水理現象は一次元解析法によって与えられる管路流れの数学的モデルによって取り扱われる。

### 3. システム・モデルの定式化

トリートメント・システムにおける非定常流れの解析は、節点に対する連続方程式、およびエネルギー方程式を連立して解くことに依りて行なわれる。有向グラフの幾何学的連結構造を表わす連結行列  $A(a_{ij})$  を用いれば、節点  $i$  の容量  $C_i$  が管断面積に比して十分大きいとき、節点に対する連続の条件は次式で近似される。

$$C \cdot D \dot{Q} = Q - A \cdot Q \quad \text{---- (1)}$$

エネルギー方程式は、各管の断面積が一樣であれば、つぎのように簡単に書かれる。

$$\frac{1}{2} \rho L \cdot S^{-1} \cdot D \dot{Q} - A^* \dot{Q} + H = 0 \quad \text{---- (2)}$$

ここに、 $C$ ：各節点の容量を成分とする対角行列、 $D$ ： $\rho C$  を成分とする対角行列、 $\dot{Q}$ ：節点におけるエネルギー高さを表わすベクトル、 $Q$ ：節点に対する流出・流入流量を表わすベクトル、 $Q$ ：枝の流量ベクトル、 $g$ ：重力の加速度、 $L$ ：管の長さを成分とする対角行列、 $S^{-1}$ ：管断面積を成分とする対角行列の逆行列、 $H$ ：枝の損失水頭ベクトル、 $A$ ：節点  $i$  が枝  $j$  の始点、終点、あるいは非連結に依りてそれぞれ  $a_{ij} = 1, -1, 0$  を成分とする連結行列、 $A^*$ ： $A$  の転置行列、である。

つぎに、実際その他による損失水頭は流量の二乗に比例することが経験的に知られているが、管路システムに対するこの関係は一般的に次式で記述される。

$$H = K \cdot |Q| \cdot Q \quad \text{---- (3)}$$

ここに、 $K$ : 枝で定義される係数を表わす対角行列、 $|Q|$ : 枝の流量の絶対値を成分とする対角行列、である。

(1), (2), および(3)式はトリ-システムに対する基礎方程式であり、これらを解くことにより、先の水理学的挙動を知ることが出来る。(2)式を時間で微分し、これに(1), (3)式を代入すれば、つぎのシステム・モデルが得られる。

$$\frac{1}{g} \cdot L \cdot S^{-1} \cdot DQ + 2K|Q| \cdot DQ + A^* C^{-1} A \cdot Q = A^* C^{-1} Q \quad \text{--- (4)}$$

上式は、トリ-の枝の個数を  $n$  とすれば、枝の流量に関する  $n$  個の 2 階の連立非線形常微分方程式系を表わしている。システムが複雑な場合、(4)式の解は、解析的に求めることは不可能であり、数値積分法に頼らざるを得ない。 $DQ = \dot{Q}$  とおけば、(4)式は数値積分に便利な  $2n$  個の 1 階連立常微分方程式系に変換される。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} DQ &= \dot{Q} \\ DQ_* &= g \cdot (L \cdot S^{-1})^{-1} \cdot (-2K|Q| \cdot Q_* - A^* C^{-1} A Q + A^* C^{-1} Q) \end{aligned} \right\} \text{--- (5)}$$

システムの入力(節点に対する流出・入流量)が時間的に変動するとき、トリ-システムの水理学的応答は、(5)式を Runge-Kutter-Gill 法等の適当な数値積分法を用いて解くことにより、知られる。

#### 4. 基本トリ-システムへの適用例

一般のトリ-システムは図-1の(a), (b)二つの基本的なサブ・システムを適当に組み合わせで得られる。(5)式をこれらに適用して得られた結果はつぎのようである。すなわち、図-3, 4, 5は、図-2の入力波形について、全節点の容量を同率に変えて得られた枝流量を、節点容量を管断面積で除した無次元量  $C/A$  との関係において示したものである。図-2より、節点容量の増大は、 $C/A$  が  $10^2$  のオーダー以上では、とくに顕著な出力波形の減衰をもたらすことが知られる。また、図-4, 5より、節点容量の同率変化の条件下では、枝流量のピーク値は容量の増加とともに指数関数的に減少するというシステム特性が認識される。

#### 5. おまじ

以上に述べたトリ-管路システムの流量解析法は簡単かつ系統化されているという取り扱い上の利点の他に、計算機のプログラミングに極めて適した方法である。

1) Trent, H.M.: Isomorphisms between Oriented Linear Graphs and Lumped Physical Systems, Journal American Acoustic Society, Vol. 27, No. 3, May, 1955, pp. 500 ~ 527

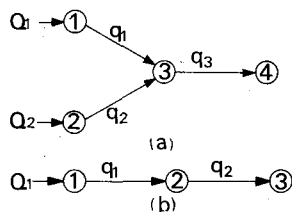


図-1 基本トリ-システム

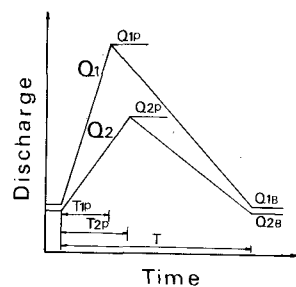


図-2 入力波形

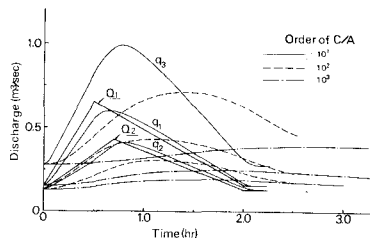


図-3 システム(a)の応答

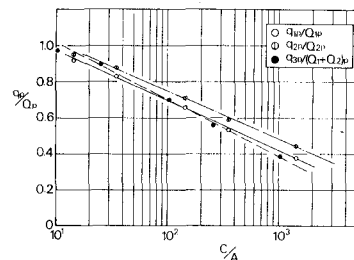


図-4 システム(a)のピーク流量

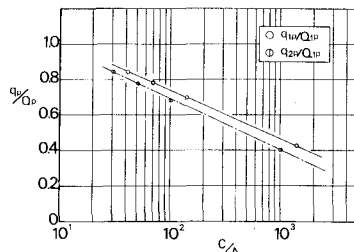


図-5 システム(b)のピーク流量