一様流における擬似分散について

阪大工学部　正員　　村岡　浩爾
関西電力　正員　○赤井　新也

1. 序　流れの中での拡散現象を差分式で解く場合、移流項は特に擬似分散と呼ばれる誤差を生じ、この誤差は拡散と同様の効果をもつ。そして差分式の安定条件のみを考慮して、ΔT と Δx とを決定すると擬似分散が本来の拡散より卓越しその計算は、特に非定常拡散に関して、定量的に無意味になる。従って擬似分散の特性を知ることは、拡散現象を差分式で解くに際して不可欠のことである。

2. 拡散係数の定義　元来拡散係数とは物理的な拡散現象から定義されるものである。数学的には拡散係数Dが一定であるとして、平均流速で動く座標系を用いると

$$\partial C/\partial t = D\,\partial^2 C/\partial \xi^2 \qquad (1)$$

であらわされる。一方擬似分散は数値計算の途中にあらわれる解の拡散であって、これに対応する物理現象は存在しない。それ故擬似分散の大きさを定義するためには物理的な拡散係数と矛盾せず、かつ擬似分散をも含む新しい係数を定義することが必要になる。そのような係数として、Fischer[1]の change of moment method（モーメント変化法）による拡散係数を導入する。式(1)の両辺にξ^2を乗じて積分形にし、右辺を2回部分積分し、左辺の積分と微分を順序交換すると

$$D=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} C\xi^2 d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} C\,d\xi}\right) \qquad (2)$$

を得る。この方法は汚濁分布が階段状にあらわされた場合でも有効である。

3. Bellaの研究[2]　一様流の対流方程式

$$\partial C/\partial t = -u\,\partial C/\partial x \qquad (3)$$

をオイラー的な差分方程式になおすとその一般形は

$$C(N,T+\Delta T)=C(N,T)+F[(1-\gamma)C(N-1,T)+\gamma C(N,T)]-F[(1-\gamma)C(N,T)+\gamma C(N+1,T)] \qquad (4)$$

であらわされ、ここで　$F=u\Delta T/\Delta x$　である。$\gamma=0.0$で上式は上流差分に、$\gamma=0.5$で中心差分に、$\gamma=1.0$ で下流差分になる。初期条件として図1-a のような短柵分布を考えると、$t=T$での分散（Variance）は

$$\sigma^2(T)=\Delta x^2/12,$$

$t=T+\Delta T$（図1-b）での分散は

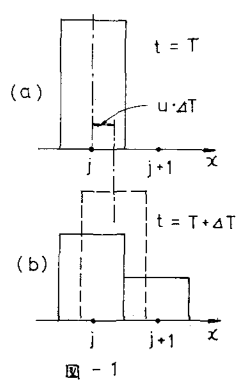
$$\sigma^2(T+\Delta T)=\Delta x^2/12+u\Delta T\Delta x-(u\Delta T)^2-2\gamma u\Delta T\Delta x$$

になる。式(2)から擬似分散係数D_pは

$$D_p=\frac{1}{2}\{\sigma^2(T+\Delta T)-\sigma^2(T)\}/\Delta T = \frac{u}{2}[(1-2\gamma)\Delta x-u\Delta T] \qquad (5)$$

になる。$\gamma=0.0,\ 1.0,\ 0.5$ を代入するとD_pは夫々

$$D_p=\frac{u}{2}(\Delta x-u\Delta T),$$



図－1

$$D_p=-\frac{u}{2}(\Delta x+U\Delta T),$$
$$D_p=-\frac{1}{2}U^2\Delta T$$

になる。ここで擬似分散が負の場合は、Cの値を負にし、実情に合わない。それ故これらの差分法は移流項に適用するのに妥当でない。なおこれはexplicitな方法についてであるが、implicitな方法についても同様の結果がえられる。[3)]

4. 擬似分散は2項分布をする ここではBellaの議論をおしすすめて擬似分散が2項分布をすることを示し、これから上の結論が任意の時刻に成り立つことを導こう。物理的意義から後方差分のみを考え、$C(k\Delta x, n\Delta T)$を$C(k,n)$であらわすと、式(4)から$\gamma=0.0$を代入して

$$C(k,n)=(1-F)\,C(k,n-1)+F\,C(k-1,n-1) \qquad (6)$$

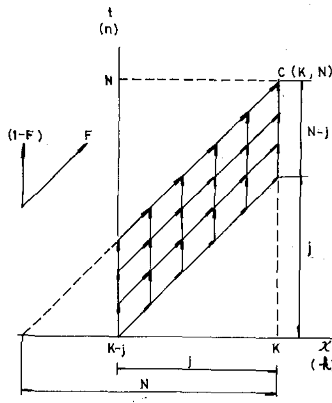


図2 擬似分散は2項分布をする。

になる。図-2を参照して、$C(K-j,0)$が$C(K,N)$に及ぼす影響は$(1-F)$を$(N-j)$回、Fをj回乗じたもので、その組み合わせは$(N-j)+j=N$を$(N-j)$とjとに分ける組み合わせ故、その数は${}_NC_j=N!/\{j!\,(N-j)!\}$になる。従ってC(K,N)は2項分布をして

$$C(K,N)={}_NC_jF^j(1-F)^{N-j}C(K-j,0) \qquad (7)。$$

初期条件として、$C(0,0)=1$, $C(k,0)=0\ (k\neq0)$とすると $j=K$を代入して

$$C(K,N)={}_NC_KF^K(1-F)^{N-K}$$

になる。この時の分散は$NF(1-F)\Delta x^2$だから

$$D_p=\frac{1}{2}\{(N+1)F(1-F)\Delta x^2-NF(1-F)\Delta x^2\}/\Delta T$$
$$=\frac{U}{2}(\Delta x-U\Delta T)$$

となってBellaと一致する。

また2項分布の最大値は

$$(N+1)F-1<m\leq(N+1)F$$

をみたす整数mであらわされる。$m=(N+1)F$とすると、この位置はNの1ステップ(ΔT)の間にFだけ進むから、区間長がΔxであることを考慮すると単位時間には、$\Delta xF/\Delta T=U$だけ進む。即ち、最大値は流れにのって移動する。

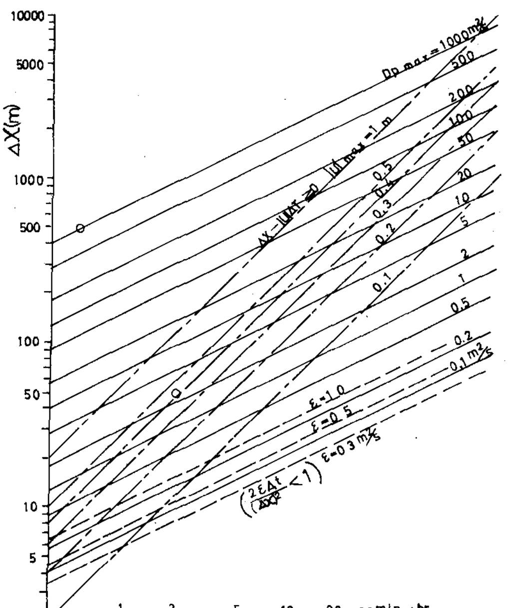


図-3 Dp maxを与えてΔXとΔTを組み合わせる。

5. 擬似分散の大きさ 移流項計算のΔT, Δxを不定流計算のそれと共有すると、不定流計算の安定条件

$$(|U|+\sqrt{gH})\Delta T/\Delta x<1$$

の方が、移流計算の安定条件

$$|U|\Delta T/\Delta x\leq1$$

をたいていの場合含んでしまうので前者から

$$\Delta x - |u|\Delta T > \sqrt{gH}\,\Delta T$$

となり

$$D_p = \frac{u}{2}(\Delta x - |u|\Delta T) > \frac{u}{2}\sqrt{gH}\,\Delta T$$

を得る。例として、$u=0.2\,m/s$, $H=5m$, $\Delta T=30s$ とすると $D_p > 21\,m^2/s$ となり、通常観測される河川の拡散係数より1桁ないし2桁大きくなる。それ故不定流計算の $\Delta T, \Delta x$ と汚濁計算のそれとは別々にするのが望ましく、最適の組み合わせを求めるためのグラフを次のようにして得た。

$$D_p = \frac{u}{2}(\Delta x - u\Delta T) \qquad (8)$$

の最大値は $u = \frac{1}{2}\frac{\Delta x}{\Delta T}$ のときで

$$D_{p\,max} = \frac{1}{8}\frac{\Delta x^2}{\Delta T}。$$

この関係を図-3に実線であらわす。また、安定条件 $F \leqq 1$ は鎖線であらわされている。従って汚濁計算の $\Delta T, \Delta x$ は与えられた u と D とに対し $D_{p\,max}=D$ と $F=1$ の交点に最も近く、かつ $F \leqq 1$ をみたす $\Delta T, \Delta x$ の組み合わせを採用すればよいことがわかる。なお、拡散の差分式の安定条件も破線で図-3にあわせて載せるが、この条件はゆるいので、通常考慮しなくてもよい。

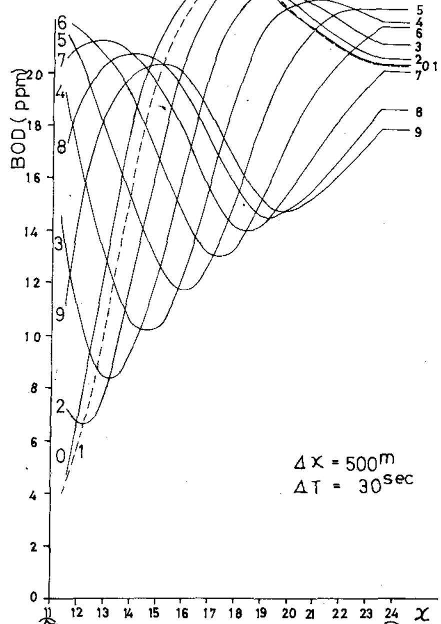


図4 BOD変化図(移流項のみ)

6. 実際河川への応用　図-4は流入したきれいな水がまわりのきたない水に囲まれ、混合しつつ流下していく様子を示している。この図から移流項だけで拡散を生じ、ΔT と Δx を不定流計算と共有したためそれが著しいことがわかる。この最低値の回復の様子を図-5に示す。図中鎖線が期待されるグラフである。D_p を小さくする方法として式(8)から、$F \leqq 1$ なる範囲で ΔT をできるだけ大きくすることが考えられる。これより $\Delta T=20$分の場合を図-5に示すがたいした効果がない。そこで図-3を用いて計画的に ΔT と Δx を選んでみよう。不定流計算の $\Delta T=30$秒, $\Delta x=500m$, $|u|_{max}=0.4\,m/s$ から、$D_{p\,max}=2\,m^2/s$ を目標にして汚濁計算の $\Delta T=120$秒, $\Delta x=50\,m$ を選んだ。その結果を図-5に示す。効果的に擬似分散を小さくできることがわかる。この時計算時間は約 $\frac{500}{50}\cdot\frac{30}{120}=2.5$ 倍になる。

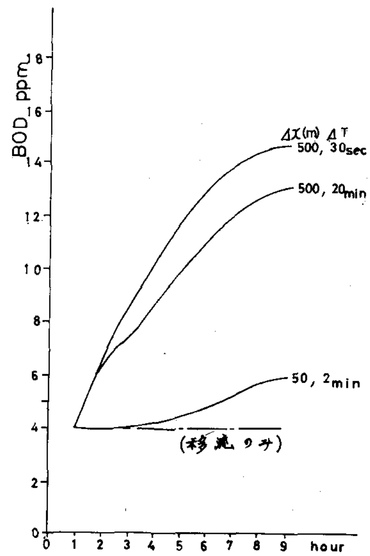


図-5 最低値の回復(移流項のみ)

参考文献

1) Fischer, Hugo B., "A Note on the One-dimensional Dispersion Model", Air & Wat. Pollut. Int. J., 1966, Vol. 10

2) Bella, David A. and Grenny, William J., "Finite-Difference Convection Errors", Proc. of ASCE, Vol. 96, No. SA6

3) Prych, Edmund A. et al., discussion of "Numerical Studies of Unsteady Dispersion in Estuaries", Proc. of ASCE, Oct., 1969, No. SA5