II−13　　管路内跳水の内部機構に関する研究

京都大学　工学部　正員　中川博次
京都大学　工学部　学生員　○祢津家久
京都大学　工学部　学生員　上田　寛

1　はしがき

筆者らは先の水理講演会において，管路内跳水場の平均流プロフィルが理論的にも実験的にも近似的に self-preservation の性質をもつことを示した[1]。しかしこの跳水場は自由噴流場と異なり，1)流下方向の圧力勾配が存在する。2)上，下壁面によって乱流拡散が抑制される等の性質をもつため，その取扱いは後者に比べはるかに複雑であり，その明確さを欠いている。ここでは，この跳水場の混合領域の平均流プロフィルに関して上記の影響を加味した理論式を導き，その混合特性を明らかにしようとしたものである。

2　混合領域の平均流プロフィルに関する基本式

一般に流れを支配するスケールが存在しないとき，流れの self-preservation が期待される。ここで一番の論点は，レイノルズ応力をいかに平均流速と結びつけるかであり，今までに多くの混合拡散理論が発表されている。ここでは自由噴流への適用で比較的成功をおさめた Prandtl の「自由乱れの新理論」(1942)を採用することにする。

すなわち，　$\tau = -\rho\overline{u'v'} = \rho K(U_m - U_b)\, b \cdot \partial u/\partial y$　　(1)

ここで，bは混合幅であり，　$b = \sigma x (x/x_0)^{m-1}$　；U_mは最大流速，$U_m/U_0 = (x/x_0)^{-m}$とおく。
self-preservation の仮定から，運動方程式は次式で与えられる。

i) $m \neq 1$　$f'''(\eta) + f(\eta)f''(\eta) + \alpha\{(f'(\eta))^2 - 2\epsilon\} = 0$　　(2)

$u/U_m = f'(\eta)$，　$v/U_m = \sqrt{\beta/(1-m)}\ \sigma\{f'\eta - (1-m)f\}$

$\alpha = m/(1-m)$，　$\beta = K/\sigma$，　$\eta = \sqrt{(1-m)/\beta}\ y/b$

2ϵはエネルギー補正係数とエネルギー損失係数との和であり次のように定義される。

圧力項 $G(x) = \frac{1}{2}\frac{x_0}{D}\left(\frac{x}{x_0}\right)^{2m+1}\frac{\partial}{\partial(x/D)}\left(h/\frac{U_0^2}{2g}\right) = \frac{1}{2}\frac{x_0}{D}(x/x_0)^{2m+1}\epsilon\frac{\partial}{\partial(x/D)}\left\{\left(\frac{U_m}{U_0}\right)^2\right\}$　　(3)

つまり，ϵは1の1)の影響を表わす圧力指示係数である。

ii) $m = 1$　$\beta F'''(\eta_1) + F'^2(\eta_1) - 2\epsilon = 0$，　$u/U_m = F'(\eta_1)$，　$\eta_1 = y/b$　　(4)

ii)の場合は容易に積分できるから，ここではi)の場合のみ考察する。(2)式は層流境界層の一般化方程式と同型であり，ただその境界条件が異なるだけである[2]。この対比を示すと次のようである。

	管路内跳水場	一般化層流境界層
基本式	$f''' + ff'' + \alpha(f'^2 - 2\epsilon) = 0$	$f''' + ff'' + \alpha(f'^2 - 1) = 0$
境界条件	$f'(0) = 1$，$f'(\sqrt{(1-m)/\beta}) = 0$，$f''(0) = 0$	$f(0) = 0$，$f'(0) = 0$，$f'(\infty) = 1$
速度てい減	$U_m/U_0 = (x/x_0)^{-m}$	$U_m/U_0 = K^{(1-m)}(2/(1-m))^{-m}(x/L)^{-m}$
無次元座標	$\eta = \sqrt{(1-m)/\beta}\cdot y/b$，　$b \propto x$	$\eta = \sqrt{R/L}\cdot y/g$，　$g \propto x^{\frac{1+m}{2}}$
係　数	$\alpha = m/(1-m)$，　$\beta = K/\sigma$	$\alpha = 2m/(1-m)$，　$R = U_\infty L/\nu$

3　計算結果とその考察

α，β，ϵを与えれば，(2)式を解くことができる。まずαは各開度ごとの最大速度のてい

減特性から求められる。βまたはKは(2)式が実験値と一致するようK選ばれた実験定数であり，2次元噴流で $K=0.037$ (Reichardt), wall jet で $K=0.012$ (Glauert), $m=0$の噴流で 0.0069 (Görtler) と流れの性質によってまちまちである。ここでは，$m=0$のときの実験値$\beta=0.0293$[1)] を使う。

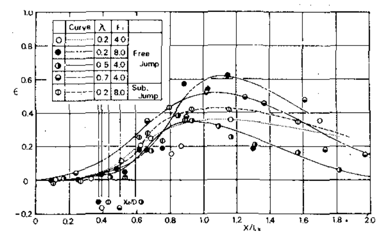

図1 ϵの変化図

次に流れの self-preservation が成立するにはϵが定数でなければならないが，図1に示したϵのバラつき程度ではそれほど流速分布形は変化しない(図2参照)，以下の結果は京都大学大型計算機を用いて Runge−Kutter法で数値解析を試みたものであり，代表例として $m=0.5$ の結果を図2に示したが，これはy方向のてい減度が大きすぎる曲線になっている。不確定なβの影響を最小におさえるためy座標を$y_{0.5}$ ($u=\frac{1}{2}U_m$の位置) で規準化したものが図3であり，実験結果も併示してある。両者の一致はかなり良く，また$\epsilon=0$より圧力勾配を加味した理論曲線の方が現象をより正確に示し，跳水のような局所的変動場では圧力勾配が拡散特性に影響を与えることがわかるが，実用上はそれほど大きい差異がなく，ϵが約0.4以下ならば近似的に流れの self-preservation が成立するとして，流速分布形を $(1-\xi^2)^{3/2}$ なる実験曲線で表わしても妥当であることが裏づけられた。次に計算した流速分布形の裾部がかなり大きいが，これは1の2)の影響をあまり加味していない点にある。もともと(1)式は上下壁面拘束がない場合に成立する式であって，(2)式は自由噴流としての特性を含んでいる。いま筆者らは1の2)の効果を取り入れたKの台形モデルを考え，(1)式の代りに，

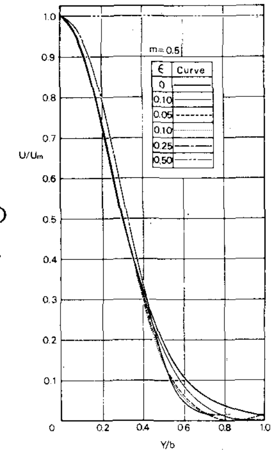

図2
$m=0.5$の計算結果

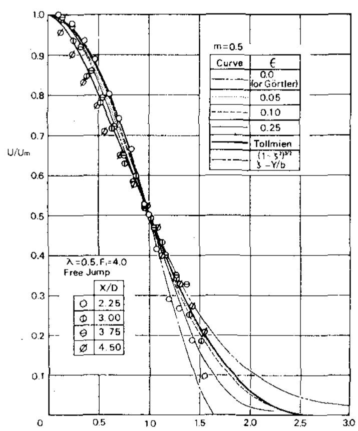

図3 規準化した流速分布図

$$\tau = \rho(K_0 - K_1 y/b)(U_m - U_t)\, b\, \partial u/\partial y \qquad (6)$$

を採用すれば，

$$(1-\beta\eta)f''' + (f-\beta)f'' + \alpha(f'^2 - 2\epsilon) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{境界条件};\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'\left(\sqrt{(1-m)/\beta_0}\right)=0,\ \eta=\sqrt{(1-m)/\beta_0}\cdot y/b,\ \beta=\beta_1/\sqrt{\beta_0(1-m)} \\ \beta_0 = K_0/\alpha,\quad \beta = K_1/\alpha \end{array}\right\} \qquad (7)$$

となる。やはり実験定数βを含むが(2)式よりよい結果を得ている。(詳細は講演時に発表する)

4. あとがき

管路内跳水場の混合領域の流速分布形の self-preservation は圧力指数係数ϵが小さいとき近似的に成立することがわかった。

参考文献 1) 中川，祢津；管路内跳水に関する実験的考察；土木学会 水理講演会 1972
2) D.R. Hartree; On an equation occuring in Falkner & Skan's approximate treatment of equation of boundary layer. Proc. Cambr. Phil. Soc. 1937