

大阪大学工学部 正員 室田 明
 大阪大学大学院 学生員 江藤 剛治
 同 学生員 〇田中 剛

1. まえがき: 水文量の統計的特性は時間単位のとりにかたによって変化する。一般に河川流量、降水量などの確率密度関数はつぎのようなガンマ分布であらわされるといわれている。

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x} \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{ただし } 0 \leq x < \infty, \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} \cdot dx$$

ここで α ; 形状母数, $\alpha > 0$, β ; 尺度母数, $\beta > 0$

(1)式に示すように、ガンマ分布の分布形は α , β なる2つの母数により特徴づけられるので、本研究では母数 α , β と時間単位の関係について理論的考察、およびその結果と実測値から得られる結果との比較を行なった。

2. ガンマ分布に従う確率変数の和の分布: もっとも単純な例として、2確率変数の和の分布の近似解を誘導する。(この方法は一般に複数の確率変数についても拡張できる。)

i) 独立な2変数の場合。 X_1, X_2 は互いに独立で、それぞれの確率密度関数はそれぞれ $f(x_1; \alpha_1, \beta_1), f(x_2; \alpha_2, \beta_2)$ なるガンマ分布であるとする。(1)式の積率母関数 $g(\theta)$ は

$$g(\theta) = (1 - \frac{\theta}{\beta})^{-\alpha} \quad \dots \dots \dots (2)$$

また、 $X = X_1 + X_2$ なる確率変数の積率母関数 $g(\theta)$ は

$$g(\theta) = g_1(\theta) \cdot g_2(\theta) = (1 - \frac{\theta}{\beta_1})^{-\alpha_1} \cdot (1 - \frac{\theta}{\beta_2})^{-\alpha_2} \quad \dots \dots \dots (3)$$

ここに $g_1(\theta), g_2(\theta)$ はそれぞれ X_1, X_2 の積率母関数

(3)式より $\beta_1 = \beta_2$ の場合 X は $(\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 (= \beta_2))$ を母数とするガンマ分布に従う。ところで一般には $\beta_1 \neq \beta_2$ であるので、 X の確率密度関数は厳密にはガンマ分布とはならない。しかし経験的に X の分布もまたガンマ分布で近似できると考えられるので、筆者らはこの近似的ガンマ分布を、 X_1, X_2 の母数 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ で表現する方法、およびその誤差を示す式を導いた。この近似解の積率母関数を $g_*(\theta)$ 、その母数を α_*, β_* とする。すなわち

$$g_*(\theta) = (1 - \frac{\theta}{\beta_*})^{-\alpha_*} \quad \dots \dots \dots (4)$$

(3)式と(4)式が近似的に等しいとおくことにより、 $\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2$ をもちいて α, β を表わす。(3)式、(4)式の右辺を θ についてテーラー展開し、 θ に関する1次、2次の係数を等しいとおいて整理すると、

$$\alpha_* = \frac{(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1)^2}{(\alpha_1 \beta_2^2 + \alpha_2 \beta_1^2)}, \quad \beta_* = \frac{\beta_1 \beta_2 (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1)}{(\alpha_1 \beta_2^2 + \alpha_2 \beta_1^2)} \quad \dots \dots \dots (5)$$

また $\alpha = \alpha_*, \beta = \beta_*$ とおくことによる誤差の大きさは、 θ^3 の係数の差によって検討できる。 δ は、(5)式を(4)式に代入して、つぎのように求まる。

$$\delta = \alpha_1 \alpha_2 (\beta_1 - \beta_2)^2 / 3 \beta_1^2 \beta_2^2 (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_1) \quad \dots \dots \dots (6)$$

ii) 従属な2変数の場合。 X_1, X_2 が従属な確率変数の場合は相関係数 ρ を導入するこ

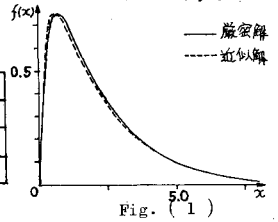
とにより

$$\left. \begin{aligned} \alpha_* &= (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1)^2 / (\alpha_1 \beta_2^2 + 2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \beta_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1^2) \\ \beta_* &= \beta_1 \beta_2 (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1)^2 / (\alpha_1 \beta_2^2 + 2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \beta_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1^2) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

を得る。つぎに種々の $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ の組みあわせに対して, (5)式より得られる近似解 α_* , β_* と, 数値計算により求めた厳密解 α, β および δ と相対誤差 δ_r を Table (1) に示す。また Fig (1) に厳密解と近似解の比較の例を示す。

	α_1	β_1	α_2	β_2	α	α_*	β	β_*	δ	δ_r
Case I	0.5	2.0	0.5	1.0	0.7870	0.9000	1.0365	1.2000	0.01389	0.0282
Case II	1.0	2.0	0.5	1.0	1.4550	1.3333	1.4911	1.5333	0.0203	0.0278
Case III	5.0	2.0	0.5	1.0	5.3176	5.1429	1.7957	1.7143	0.03472	0.0046

Table (1)



これらの図表からわかるように, 厳密解と近似解はほとんど完全に一致し, δ_r も小さい。これらのことから (5) 式が実用上十分な精度を有していることがわかる。

3. 確率分布関数が飛躍をもつ場合の和の分布: 日降水量のように時間単位の小さい降水量の確率分布関数は 0 点において飛躍をもつ。このような確率変数に対しては前述の連続的な分布の和の分布を求める方法をそのまま使うことはできない。このため筆者らはつぎのような確率分布関数による定式化を行なった。

R ; 降水のおこる事象, D ; 無降水のおこる事象, とすると, R の生起確率が p であれば, D の生起確率は $(1-p)$ であらわされ, 降水量の確率分布関数 $F(x)$ は,

$$F(x) = (1-p) + p \int_{-\infty}^x f_R(x) dx \quad ; \quad x \geq 0 \quad (8)$$

ここに $f_R(x)$ は降水が生起したという条件付きの降水量 X の確率密度関数

X_1, X_2 が降水生起確率 p_1, p_2 で母数 $\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2$ なるガンマ分布に従う確率変数であるとするとき, $X = X_1 + X_2$ が降水生起確率 p で生起したという条件付き確率分布が近似的に母数 α, β なるガンマ分布に従うとき, p, α, β を $p_1, p_2, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ で表わすことを考える。 X_1, X_2 についての組みあわせは,

i) $X_1; D, X_2; D$ ii) $X_1; D, X_2; R$ iii) $X_1; R, X_2; D$ iv) $X_1; R, X_2; R$

のみでありこれらは互いに排反であることから, X の確率分布関数 $F(x)$ は

$$F(x) = (1-p_1)(1-p_2) + (1-p_1)p_2 \int_{-\infty}^x f_{2R}(x; \alpha_2, \beta_2) dx + (1-p_2)p_1 \int_{-\infty}^x f_{1R}(x; \alpha_1, \beta_1) dx \\ + p_1 p_2 \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{x-x_2} f_{1R}(x; \alpha_1, \beta_1) \cdot f_{2R}(x_2; \alpha_2, \beta_2) dx_2 \quad ; \quad x \geq 0 \quad (9)$$

ところで (9) 式の第 4 項は, (5) 式により近似的に α', β' をもつガンマ分布の確率分布関数 $F'(x)$ で表わすことができるので, その確率密度関数を $f'_R(x; \alpha', \beta')$ とすると, (9) 式の第 4 項は

$$p_1 p_2 \int_{-\infty}^x f'_R(x; \alpha', \beta') dx \quad (10)$$

と書きかえられる。一方, $X = X_1 + X_2$ の確率分布関数 $F(x)$ は (8) 式で表わされるので, (8) 式と, (9) 式に (10) 式を代入した近似式との比較からつぎのような関係を得る。

$$(1-p_1)(1-p_2) = (1-p) \quad (11)$$

$$\int_{-\infty}^x \{ (1-p_1)p_2 f_{2R}(x; \alpha_2, \beta_2) + p_1(1-p_2) f_{1R}(x; \alpha_1, \beta_1) + p_1 p_2 f'_R(x; \alpha', \beta') \} dx = p \int_{-\infty}^x f_R(x; \alpha, \beta) dx \quad (12)$$

(12) 式の両辺を x で微分し, 原典まわりの 1 次および 2 次モーメントを求めて整理すると,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \mu = \frac{1}{p_1 + p_2 - p_1 p_2} \left\{ (1-p_1)p_2 \frac{\alpha_2}{\beta_2} + p_1(1-p_2) \frac{\alpha_1}{\beta_1} + p_1 p_2 \frac{\alpha'}{\beta'} \right\} \quad (13)$$

$$\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta} = \mu_2 = \frac{1}{P_1 + P_2 - P_1 P_2} \left\{ (1-P_1) P_2 \frac{\alpha_2(\alpha_2+1)}{\beta_2^2} + P_1(1-P_2) \frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{\beta_1^2} + P_1 P_2 \frac{\alpha'(\alpha'+1)}{\beta'^2} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

または、 $\alpha = \mu^2 / (\mu_2 - \mu^2) \dots\dots\dots (15)$, $\beta = \mu / (\mu_2 - \mu^2) \dots\dots\dots (16)$

$P_1, P_2, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ は既知数であるから、 X の母数 μ, α, β は計算できる。

4. 計算結果とその検討: 以上の理論を雨量資料(大阪における1901年~1970年の半旬雨量資料), および流量資料(淀川水系名張川, 月ヶ瀬地点における1918年~1965年の半旬流量資料)に適用した。

雨量資料については, 各半旬雨量のガンマ分布における α, β から旬雨量の α_*, β_* を計算した。その結果を α_* について Fig(2), β_* について Fig(3)に示す。一方比較のため実際の旬雨量資料から計算された α, β についてもそれぞれ Fig(2), Fig(3)に示す。Fig(2),

Fig(3)に示すように, 合成された近似値 α_*, β_* の値と旬雨量資料から得られた α, β の値は各旬においてほぼ一致した。

流量資料について半旬, 旬, 半月……など各時間単位に対する, 1月, 3月, 5月, 7月, 9月, 11月の各月中の

α, β の平均値を Fig(4), Fig(6)に示す。一方 Fig(5), Fig(7)に近似解 α_*, β_* を示す。i) Fig(4), Fig(5)より流量の場合, 2ヶ月以上の時間単位に対して α が急激に大きくなるが, 分布図より2ヶ月以上の時間単位に対しては正規分布に従うとみなしうることがわかった。ii) 自己相関係数の小さい雨量資料および冬季以外の流量資料については, 独立性の仮定にもとづく(15)式, (16)式による解は十分な近似度があった。iii) 自己相関係数を導入した(7)式を用いれば, 2変数の場合は自己相関係数の大小にかかわらず, 完全に一致する。

最後に, 本研究にあたり, 吉岡俊策氏(熊谷組)の協力をいただいたことに感謝します。

