

弾塑性構造物のランダム応答について ——逐次等価線形化解法の適用性——

京都大学工学部 正員 亀田弘行
京都大学大学院 学生員 家村浩和
兵庫県 正員 ○原口和夫

1. まえがき 地震動のような外力はその強度・周波数などが不規則かつ非定常に変動する特性を有し、弾性変形量のあまり期待できない構造物を対象とする場合には、その不規則応答解析を非線形非定常過程で実施する必要があると考えられる。T.K. Caughey¹⁾氏はすでに bi-linear 形履歴特性を有する振動系に、定常確率過程で表わされる外力が作用した場合の応答解析を、等価線形化解法を用いて行った。しかし非定常過程における弾塑性履歴系の等価線形化に関してはいまだ研究の段階にあり、系統的な研究成果としてはわずかに小堀・南井両氏の論文²⁾があるのみである。本文は逐次等価線形化解法の考え方に従って、bi-linear 形履歴特性を有する1自由度系構造物の不規則外力に対する非定常応答解析を step-by-step の数値計算により行なう手法の適用性について述べるとともに、この手法による数値計算例を示したものである。

2. 逐次等価線形化解法を用いた非定常不規則応答の数値計算法 図-1に示すように、非定常不規則応答を時間軸上で微小区間に分割し、いま第*i*番目の区間 $[0, \tau_i]$ について考える。この区間における諸量を suffix *i* を付して示すと、無次元化した運動方程式は次式で表わされる。

$$\ddot{\eta}_i + 2h_0 \dot{\eta}_i + g_i(\eta_i, \dot{\eta}_i; \tau) = -\beta \psi(\tau; t_0) f_i(\tau) \quad \text{---(1)}$$

ここに、 $\cdot$ は無次元化した時間 τ に関する微分を表わし、 h_0 は構造物の減衰定数、 β は加速度の次元を有する定数、 ψ は外力の時間変化を表わす関数、 t_0 は入力の前等価継続時間、 $f_i(\tau)$ は定常確率過程、 g_i は図-2に示すように無次元化した履歴曲線を表わす。(1)式を次式のような線形系で近似する。

$$\ddot{\eta}_i + d_{gi} \dot{\eta}_i + k_{gi} \eta_i = -\beta \psi(\tau; t_0) f_i(\tau) \quad \text{---(2)}$$

上式の d_{gi} , k_{gi} は等価減衰係数および等価円振動数であり、最小二乗誤差最小の規範などから決定できる³⁾。この式の解は強制振動と自由振動の和として次式のように得られる。

$$\eta_i(\tau) = -\frac{\beta \psi(\tau; t_0)}{P_i} \int_0^\tau h_i(\tau-t') f_i(t') dt' + I_i(\tau), \quad \dot{\eta}_i(\tau) = -\frac{\beta \dot{\psi}(\tau; t_0)}{P_i} \int_0^\tau h_i(\tau-t') f_i(t') dt' + \dot{I}_i(\tau) \quad \text{---(3)}$$

ここに、 $P_i = \sqrt{k_{gi} - d_{gi}^2/4}$, $I_i(\tau) = G_{1i}(\tau) \eta_{i0} + G_{2i}(\tau) \dot{\eta}_{i0}$, $\dot{I}_i(\tau) = G_{3i}(\tau) \eta_{i0} + G_{4i}(\tau) \dot{\eta}_{i0}$

$$\left. \begin{aligned} G_{1i}(\tau) &= \exp(-d_{gi}\tau/2) (\cos p_i \tau + (d_{gi}/2p_i) \sin p_i \tau), & G_{2i}(\tau) &= (1/P_i) \exp(-d_{gi}\tau/2) \sin p_i \tau \\ G_{3i}(\tau) &= -(k_{gi}/P_i) \exp(-d_{gi}\tau/2) \sin p_i \tau, & G_{4i}(\tau) &= -(d_{gi}/2P_i) \exp(-d_{gi}\tau/2) \sin p_i \tau + \exp(-d_{gi}\tau/2) \cos p_i \tau \end{aligned} \right\} \quad \text{---(4)}$$

ただし、 η_{i0} , $\dot{\eta}_{i0}$ はそれぞれ第*i*番目の区間 $[0, \tau_i]$ の下限 $\tau=0$ における変位および速度応答

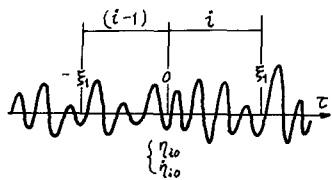


図-1

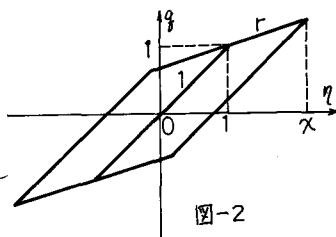


図-2

である。(3),(4)両式より $t = \tau_1$ における変位応答・速度応答の分散値 $\sigma_{\dot{q}}^2(\tau_1) \cdot \sigma_{\ddot{q}}^2(\tau_1)$ およびこれらの相関係数 $\rho_{\dot{q}, \ddot{q}}(\tau_1)$ は次式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\dot{q}}^2(\tau_1) &= E[\dot{q}^2(\tau_1)] = (\beta^2 \phi_1^2 / \rho_1) \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_1} \dot{h}_1(\tau_1 - t) \dot{h}_1(\tau_1 - t') E[\dot{f}(t) \dot{f}(t')] dt dt' - (2\beta \phi_1 / \rho_1) E[\dot{I}_1(\tau_1)] \int_0^{\tau_1} \dot{h}_1(\tau_1 - t) \dot{f}(t) dt + E[\dot{I}_1^2(\tau_1)] \\ \sigma_{\ddot{q}}^2(\tau_1) &= E[\ddot{q}^2(\tau_1)] = (\beta^2 \phi_1^2 / \rho_1^2) \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_1} \ddot{h}_1(\tau_1 - t) \ddot{h}_1(\tau_1 - t') E[f(t) f(t')] dt dt' - (2\beta \phi_1 / \rho_1) E[\dot{I}_1(\tau_1)] \int_0^{\tau_1} \ddot{h}_1(\tau_1 - t) f(t) dt + E[\dot{I}_1^2(\tau_1)] \\ \rho_{\dot{q}, \ddot{q}}(\tau_1) &= E[\dot{q}(\tau_1) \ddot{q}(\tau_1)] / \sigma_{\dot{q}} \sigma_{\ddot{q}} = (\beta^2 \phi_1^2 / (\rho_1^2 \sigma_{\dot{q}} \sigma_{\ddot{q}})) \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_1} \dot{h}_1(\tau_1 - t) \ddot{h}_1(\tau_1 - t') E[\dot{f}(t) f(t')] dt dt' \\ &\quad - \beta \phi_1 / (\rho_1 \sigma_{\dot{q}} \sigma_{\ddot{q}}) E[\dot{I}_1(\tau_1)] \int_0^{\tau_1} \ddot{h}_1(\tau_1 - t) f(t) dt - \beta \phi_1 / (\rho_1 \sigma_{\dot{q}} \sigma_{\ddot{q}}) E[\dot{I}_1(\tau_1)] \int_0^{\tau_1} \dot{h}_1(\tau_1 - t) \dot{f}(t) dt + (1 / (\sigma_{\dot{q}} \sigma_{\ddot{q}})) E[\dot{I}_1(\tau_1) \dot{I}_1(\tau_1)] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

上式に(4)式の関係を考慮すると、 $t = \tau_1$ における変位・速度応答の分散値およびこれらの相関係数が、 $t = 0$ における各々の値より求めることができる。この場合、入力 $f(t)$ がすべての振動数に対して一様なパワースペクトル密度を有しておれば、(5),(6)両式の右辺第2項および(7)式右辺第2, 3項は0となり、非常に簡単な計算式が得られるが、特定のパワースペクトル密度を有する場合にはこれらの項の影響も考慮に入れなければならない。

3. 数値計算結果 まず先に述べた逐次数値計算法の精度を検討するため、線形振動系にこの方法を適用し、得られた変位応答分散値を理論解と比較した。その結果を図-3に示したが、これより逐次数値計算法の誤差は1.0%以内であることがわかった。次にスペクトル特性が一様な定常入力が作用した場合の非定常応答解析結果より、履歴特性を有する振動系では応答レベルが大きくなるに従って固有円振動数は小さく、減衰定数は履歴による減衰が付加されて大きくなり、非線形性が強いほどまた粘性による初期減衰定数が小さいほどこの傾向が著しいことがわかった。またスペクトル特性一定、入力強度非定常な入力作用した場合の結果を図-4, 5に示したが、著者の1人が線形振動系の解析解において示した⁴⁾と同様に、応答が最大となるのは入力が最大となる時刻より遅れ、この傾向は減衰定数が小さくしたが、非線形性が弱く、入力の等価継続時間が短いほど著しいことがわかった。なお先に述べたように、地震動のように入力が特定のパワースペクトル密度を有する場合には、(5)式の計算が非常にはん雑となるのでその近似解についての検討を実施したが、その結果についての報告は講演時にゆずる。

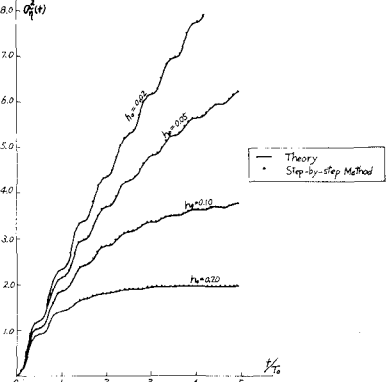


図-3 一様なパワースペクトル特性を有する定常入力に対する変位応答分散値(線形)

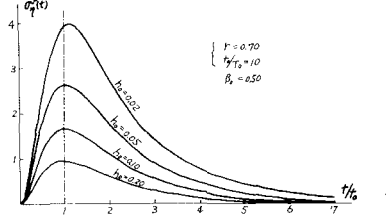


図-4 一様なパワースペクトル特性を有する非定常入力に対する変位応答分散値

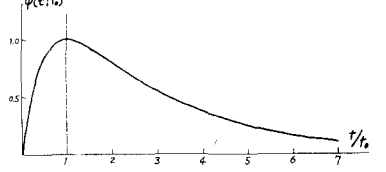


図-5 非定常入力の形状 (Shape Function)

最後に終始御指導いただいている京都大学工学部教授、後藤尚男博士に感謝の意を表する次第である。

参考文献 1) T.K. Caughey; Journal of the Acoustical Society of America, Vol.35, 1963, 2) 小堀・南井; 京大研年報 第10号A 1967 3) 後藤・家村; 第10回地震工学研究発表会講演概要, 4) 竜岡; 土木学会論文報告集投稿中