I−30

二相混合体中を伝播する波動の性質について

京都大学防災研究所　正　員　土岐憲三
京都大学　大学院　学生員　○佐藤忠信

1．まえがき．　これまで地盤構成土中を伝播する非線形波動の性質を調べるため，土を二相混合体と考えこのような物体中を伝わる Simple Wave についての研究を行なってきた[1,2]。Simple Wave は運動を支配する双曲形方程式の時間と空間に関しての滑らかな解として与えられるものであるが，非線形性を有する方程式では滑らかな解が時間と空間の全領域に対して与えられることはまれである。したがって混合体中を伝わる不連続面の性質を調べる必要が起ってくる。今回は水と弾性体あるいは性質の異る二種類の弾性体などの二相から構成される物体中を伝わる二次の不連続面についての考察を加える。この波動は加速度波と名ずけられており，変形の時間あるいは空間変数についての一次微分はすべての領域で連続であるが，波面を横切る方向の二次微分は波面上で jump をもつ波である。

2．加速度波の振幅に関する一般的な性質．　波面を横切るときの jump の大きさを支配する方程式は若干の演算の後，次式のように与えられる．

$$2U_{(\alpha)}^2\frac{da_k^{(\alpha)}}{dt}+3U_{(\alpha)}\frac{dU_{(\alpha)}}{dt}a_k^{(\alpha)}=[\dddot{x}_k^{(\alpha)}]_\alpha-U_{(\alpha)}^2N_I^{(\alpha)}N_L^{(\alpha)}[\dot{F}_{kL,I}^{(\alpha)}]_\alpha \qquad (1)$$

ここに，$N_I^{(\alpha)}$：(α)相の時刻 t における波面の方向余弦，　$X_I^{(\alpha)}$：(α)相の基準座標系における粒子位置，　$x_i^{(\alpha)}$：基準座標系で $X_I^{(\alpha)}$ にあった粒子が時刻 t で占める位置，　$a_k^{(\alpha)}$：(α)相を伝わる加速度波の振幅成分，　$F_{kL}^{(\alpha)}=\partial x_k^{(\alpha)}/\partial X_L^{(\alpha)}$，　$F_{kL,J}^{(\alpha)}=\partial^2 x_k^{(\alpha)}/\partial X_L^{(\alpha)}\partial X_J^{(\alpha)}$，$U_{(\alpha)}$：(α)相を伝わる加速度波の伝播速度，　•：$\partial/\partial t$，$[\psi]_\alpha$：(α)相の波面での ψ の jump を表わす。なお $U_{(\alpha)}$ と $a_k^{(\alpha)}$ と各変量の jump の間には次式が成立する。

$$[\dddot{x}_k^{(\alpha)}]_\alpha=U_{(\alpha)}^2a_k^{(\alpha)},\quad[\dot{F}_{kL}]_\alpha=-U_{(\alpha)}a_k^{(\alpha)}N_L^{(\alpha)},\quad[F_{kL,J}^{(\alpha)}]_\alpha=a_k^{(\alpha)}N_L^{(\alpha)}N_J^{(\alpha)} \qquad (2)$$

3．運動量の釣合式，エネルギーの釣合式，構成関係[3,4]

(a)　運動量の釣合式

$$\pi_i=\rho_2(g_i-G_i)-\sigma_{ki,k}^{(2)}+\frac{1}{2}m_1u_i+\frac{1}{2}m_2v_i\ ,\ -\pi_i=\rho_1(f_i-F_i)-\sigma_{ki,k}^{(1)}+\frac{1}{2}m_1u_i+\frac{1}{2}m_2v_i \qquad (3)$$

ここに，π_i：相相互の間でやりとりされる力，　$u_i=D^{(1)}x_i^{(1)}/Dt$，$D^{(1)}/Dt=\partial/\partial t+u_m\partial/\partial x_m$，$v_i=D^{(2)}x_i^{(2)}/Dt$，$D^{(2)}/Dt=\partial/\partial t+v_m\partial/\partial x_m$，　$f_i=D^{(1)}u_i/Dt$，$g_i=D^{(2)}v_i/Dt$，ρ_1F_i：(1)相の物体力，　ρ_2G_i：(2)相の物体力，　m_1，m_2：(1)，(2)相の質量の増減を表わす量，$\sigma_{ki}^{(\alpha)}$：(α)相の Euler の応力テンソル成分，　ρ_α：(α)相の密度である。

(b)　エネルギーの釣合式

$$\rho r-q_{k,k}+\rho D\varepsilon/Dt+\pi_i(u_i-v_i)+\frac{1}{4}(\pi_{ki}^{(1)}+\pi_{ik}^{(1)})(u_{i,k}+u_{k,i})+\frac{1}{4}(\pi_{ki}^{(2)}+\pi_{ik}^{(2)})(v_{i,k}+v_{k,i})$$
$$+\frac{1}{4}(\pi_{ki}^{(2)}-\pi_{ik}^{(2)})(u_{i,k}-u_{k,i}-v_{i,k}+v_{k,i})=0 \qquad (4)$$

ここに，$\rho D/Dt=\rho_1D^{(1)}/Dt+\rho_2D^{(2)}/Dt$，$\rho=\rho_1+\rho_2$，$r$：二相混合体単位質量当りの発生熱量，$q_k$：二相混合体の熱束ベクトル，$\varepsilon$：二相混合体単位質量当りの内部エネルギーである。

(c) **構成関係**　混合体の場合，一般的には構成関係に速度勾配（$\dot{E}^{(\alpha)}$）も関係するが，これがあると伝播速度を特性方程式から一義的に定めることができなくなる．したがってここではつぎのような構成関係をもつ混合体のみを考えることにする。

$$\varepsilon=\varepsilon(T,\underset{\sim}{E}^{(\alpha)},\underset{\sim}{v}),\ \underset{\sim}{P}^{(\alpha)}=\underset{\sim}{P}^{(\alpha)}(T,\underset{\sim}{E}^{(\alpha)},\underset{\sim}{v}),\ \underset{\sim}{\pi}=\underset{\sim}{\pi}(T,\underset{\sim}{E}^{(\alpha)},\underset{\sim}{v}),\ \underset{\sim}{q}=\underset{\sim}{q}(T,\underset{\sim}{E}^{(\alpha)},\underset{\sim}{v},\underset{\sim}{g}) \tag{5}$$

ここに，$\underset{\sim}{v}=\dot{\underset{\sim}{x}}^{(1)}-\dot{\underset{\sim}{x}}^{(2)}$，$T$：温度，$\underset{\sim}{g}=\mathrm{grad}\,T$，$\underset{\sim}{P}^{(\alpha)}$：(α)相の Piola-Kirchhoff の応力テンソルである．なお　$\underset{\sim}{\sigma}^{(\alpha)}$ と $\underset{\sim}{P}^{(\alpha)}$ との間には次式の関係が成立する。

$$\sigma_{ki}^{(\alpha)}=(\rho_\alpha/\rho_\alpha^\circ)\,x_{i,M}^{(\alpha)}\,P_{kM}^{(\alpha)} \tag{6}$$

4．一次元的な加速度波の伝播形態．　一次元的波動のみを考えるから各変量の添字を省略する。式(3)を用い波面上での jump を支配する方程式を求め，式(2),(3),(6)を考慮すれば，同温的な加速度波の伝播速度は次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} U_{(1)}^{+}&=\tfrac{1}{2}\{\sqrt{4A_1+B_1^2}-B_1\} & U_{(2)}^{+}&=\tfrac{1}{2}\{\sqrt{4A_2+B_2^2}-B_2\}\\ U_{(1)}^{-}&=-\tfrac{1}{2}\{\sqrt{4A_1+B_1^2}+B_1\} & U_{(2)}^{-}&=-\tfrac{1}{2}\{\sqrt{4A_2+B_2^2}+B_2\}\end{aligned} \tag{7}$$

ここに，$A_1=\frac{1}{\rho_1^\circ}\partial P^{(1)}/\partial F^{(1)}$，$A_2=\frac{1}{\rho_2^\circ}\partial P^{(2)}/\partial F^{(2)}$，$B_1=\frac{1}{\rho_1^\circ}\partial P^{(1)}/\partial v$，$B_2=\frac{1}{\rho_2^\circ}\partial P^{(2)}/\partial v$ である。

つぎに，加速度波の振幅の消長を調べるため，式(3)を時間で微分し波面上での方程式を求め式(1)を用いて $[\dddot{x}^{(\alpha)}]_\alpha$ を消去すれば次式をうる。

$$\frac{da^{(2)}}{dt}=-\mu_2a^{(2)}+\lambda_2a^{(2)^2}+\frac{\partial P^{(2)}}{\partial T}\left[\frac{\partial^2T}{\partial t\partial X^{(2)}}\right]_2,\quad \frac{da^{(1)}}{dt}=-\mu_1a^{(1)}+\lambda_1a^{(1)^2}+\frac{\partial P^{(1)}}{\partial T}\left[\frac{\partial^2T}{\partial t\partial X^{(1)}}\right]_1 \tag{8}$$

式(8)に現われる温度の jump $[\partial^2T/\partial t\partial X^{(\alpha)}]_\alpha$ を波面上で考えた式(4)を用いて消去し

$$\frac{da^{(2)}}{dt}=-(\mu_2+\theta_2)a^{(2)}+\lambda_2a^{(2)^2},\quad \frac{da^{(1)}}{dt}=-(\mu_1+\theta_1)a^{(1)}+\lambda_2a^{(1)^2} \tag{9}$$

をうる。ここに，$\lambda_\alpha,\mu_\alpha,\theta_\alpha$ $(\alpha=1,2)$ は $\dot{x}^{(\alpha)},F^{(\alpha)}$ の複合された複雑な関数である。

均一な状態で静止している領域へ加速度波が進入する場合：　この場合には，$F^{(1)}=0$，$F^{(2)}=0$，$v=0$ であるから，A_1,A_2,B_1,B_2 は定数となり，式(7)で与えられる $U_{(1)}^{\pm},U_{(2)}^{\pm}$ も定数となる。いま正の伝播速度の大きい方を $U_{(1)}^{+}$ とすれば，加速度波は(1)相を初めに伝わり，その後(2)相を伝わることになる。この場合式$(9)_2$の λ_1,μ_1,θ_1 は定数となり，解は次式のように与えられる。

$$a^{(1)}(t)=\xi\Big/\left\{1+\left(\frac{\xi}{a^{(1)}(0)}-1\right)e^{(\mu_1+\theta_1)t}\right\},\ \text{ただし}\ \xi=(\mu_1+\theta_1)/\lambda_1 \tag{10}$$

式(10)より，① $|a^{(1)}(0)|<|\xi|$，$\mathrm{sgn}\,a^{(1)}(0)=\mathrm{sgn}\,\xi$ ならば $t\to\infty$ のとき $a^{(1)}(t)\to0$，② $a^{(1)}(0)=\xi$ のときは $a^{(1)}(t)=a^{(1)}(0)$，③ $|a^{(1)}(0)|>|\xi|$，$\mathrm{sgn}\,a^{(1)}(0)=-\mathrm{sgn}\,\xi$ ならば，ある有限時間(t_∞)内に振幅が無限大になる；　$t_\infty=-\frac{1}{(\mu_1+\theta_1)}\ln\left(1-\frac{\xi}{a^{(1)}(0)}\right)$　(11)

一方式$(9)_1$の λ_2,μ_2,θ_2 はすでに(1)相に発生した攪乱のために混合体中に変形が生じているから，定数とはならず以上のような簡単な考察はできない。また以上の解析は(1),(2)相の不連続面が重なるような場合は考えていない，今後このような点に関して考察を進めるつもりである。三次元的な加速度波については別の機会に発表するつもりである。

1) 後藤・佐藤；土木学会関西支部年次学術講演会概要 I-52 昭46，　2) 佐藤；土木学会第26回年次学術講演会概要 I-64　昭46
3) Green & Naghdi; Int. J. Engng. Sci. 3 (1965) pp231~241,　4) Crochet & Naghdi; Int. J. Engng. Sci. 4 (1960) pp383~401