I－29　　有限要素法による減衰を考慮した板の振動解析についての二,三の考察

京都大学工学部　正員　山田善一
同上　正員　渡辺英一
同上　正員　○河野健二

1. まえがき

動的な問題の解析を試みる場合，問題となる減衰の取り扱いを板の振動を例にとって有限要素法を用いて考えることにする。普通，減衰は質量マトリックスや剛性マトリックスに比例した形で扱っている。この比例形の減衰マトリックスを用いると解析上扱いが容易になる。しかし，構造物全体の減衰を考える場合，減衰マトリックスは非比例形としての扱いが一般的となる。ここで問題となるのは減衰マトリックスの評価，およびその取り扱いである。エネルギーの変分原理から全体の運動方程式を導く有限要素法を用いて，減衰を考えてみることにする。

2. 解析方法

有限要素法においては，個々の要素の特性を用いて，全体の運動方程式を導くのであるから，構造物全体の減衰機構が異なるとき，それぞれの要素の減衰がわかっているとすると，その減衰特性を明らかにするのに便利である。そこで，いま比例減衰と考えると，全体の減衰マトリックスは必ずしも比例形とはならない。各要素の減衰マトリックスを次の形で与える。ここに $[M]^e$, $[K]^e$ はそれぞれ各要素の質量マトリックス，剛性マトリックスを表わし，ω_1 は基本振動数，β_e は減衰定数とする。

$$[C]^e = 2\beta_e \omega_1 [M]^e$$

$$[C]^e = \frac{2\beta_e}{\omega_1}[K]^e$$

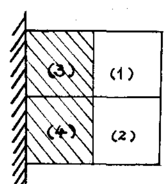

Fig. 1

全体の減衰マトリックスは合成すると次の形になる。

$$[C] = 2\omega_1[\bar{M}] = [M_c] \qquad (1)$$

$$[C] = \frac{2}{\omega_1}[\bar{K}] = [K_c] \qquad (2)$$

また，これらの $[M_c]$, $[K_c]$ を用いると，次の形でも与えられる。

$$[C] = [M_c]^{\frac{1}{2}}\left([M_c]^{-\frac{1}{2}}[K_c][M_c]^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}[M_c]^{\frac{1}{2}} \qquad (3)$$

いま長方形要素を用いることにし，変位関数として次式を用いる。

$$y = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \qquad (4)$$

節点の変位ベクトルは次のように表わす。

$$\{\delta\}^e = \left[\{\delta_i\}, \{\delta_j\}\ \{\delta_k\}\ \{\delta_l\}\right]^T \qquad (5)$$

ここに $\{\delta_i\} = \left[w_i\ \ -\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i\ \ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i\right]^T$

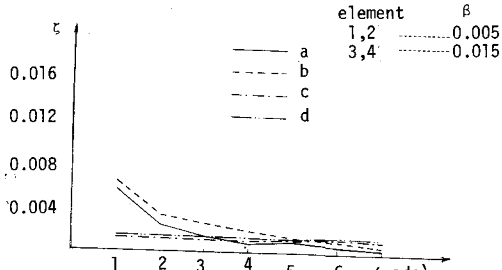

Fig 3

そうすると，全体の運動方程式は次の形になる。

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{F\} \qquad (6)$$

一般に減衰マトリックス[C]が非比例形であるとき，次の形にして考える。ここに境界条件を導入すると，[M],[K],[C]の部分マトリックス$[M_{dd}]$,$[K_{dd}]$,$[C_{dd}]$を用いて計算を進めることになる。自由振動は次式で表わされる。

$$\{\dot{y}\} + [D]\{y\} = \{0\} \qquad (7)$$

ここに

$$[D] = \begin{bmatrix} [M_{dd}]^{-1}[C_{dd}] & [M_{dd}]^{-1}[K_{dd}] \\ -[I] & 0 \end{bmatrix}, \qquad \{y\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{\delta}\} \\ \{\delta\} \end{Bmatrix}$$

いま$\{y\}=\{\Phi\}e^{pt}$とおくと次のような固有値問題となる。

$$\left| p[I] + [D] \right| = 0 \qquad (8)$$

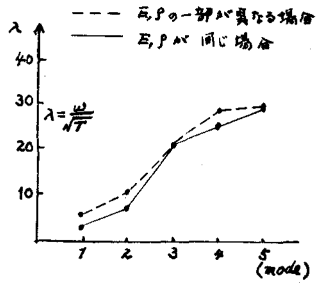

Fig 2

[D]は非対称マトリックスであるので，一般に固有値は複素数になる。特性方程式は実係数の代数方程式になるが，複素固有値が共役なものと対になっていることを利用して，実数計算だけで固有値を求める方法として *double QR method* がある。この方法で計算をおこなうことにする。

3. 数値計算

Fig 1 のような一辺が固定され，他辺が自由の板を考える。図の斜線部の弾性係数E，単位体積当りの質量ρを変えた場合と全体が同じE，ρからなる場合の減衰を考えない自由振動における固有値は *Fig 2* のようになる。次に減衰マトリックスとして式(1)および式(3)を用いた場合の各次モードの減衰定数を求めてみる。この減衰項は複素固有値の実数部で与えられる。*a*------全要素がスチールからなり式(1)を用いる場合。*b*------要素1,2がアルミで要素3,4がスチールからなり式(1)を用いる場合。*c*------全要素がスチールからなり式(3)を用いる場合。*d*------要素1,2がアルミで要素3,4がスチールからなり式(3)を用いる場合。この4つの場合について計算すると一般に各次モードの減衰定数は *Fig 3* および *Fig 4* のように表わされる。一部分のE,ρが他の部分と異なるとき，一般に各次モードの減衰定数はE,ρが一様の場合と較べて大きく評価されることがわかる。この場合対称二次のモードでモードの接近があるが，減衰定数が大きく評価されることがわかる。

4. あとがき

実際の構造物では自由度が大きいので，複素固有値問題として扱うと計算機の容量，計算時間などの点で問題が生じる。そこで減衰の評価方法についてさらに研究が必要となる。

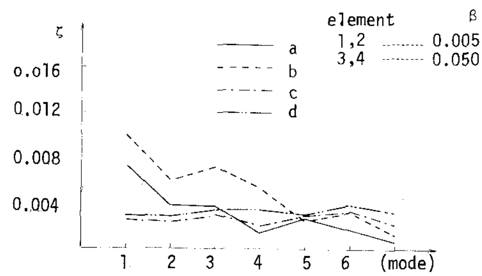

Fig 4

参考文献

1) W. C. Hurty and M. F. Rubinstein, Dynamics of Structures, Prentice-Hall, Inc. 1964
2) 山田善一，動的問題（有限要素法による数値解析），第21回応用力学連合講演会，pp 221～228, 1971
3). R.W. Clough, Analysis of Structural Vibrations and Dynamics Response, Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design, pp 441～486, U. of Alabama P., 1971