骨組構造物の分割解析法

京都大学工学部　正　員　小西一郎
京都大学工学部　正　員　白石成人
京都大学工学部　学生員　○谷口健男

1. まえがき

変位法を用いて巨大骨組系を解析しようとするとき、電子計算機の容量 etc. の関係により、系を任意個数に分割する必要性が生じる。通常のマトリクス構造解析において、これにあたるのが、matrix partitioning と呼ばれる手法であるが、これは実際の系の分割ではない。しかしながら、もし系が構成するネットワークのもつトポロジー的特性が別に規定されておれば、実際の系の分割は、すなわち、この特性を示す行列の分割に等価となる。このネットワーク、トポロジカル特性は連続条件、適合条件を示すことがすでにわかっているが[1]、さらに上記の考察より、分割解析の基本となることが考えられる。

本研究においては、ネットワーク、トポロジカル特性により与えられる情報をもとに、2つの分割解析法を提案し、特に変位法の一変形たる Tree Method[2] にそれらを適用する。

2. トポロジカル特性より与えられる分割解析に関する情報

与えられた系が接地点を除き、n コの節点を含むとき、全部材のうち n 本が tree 部材、他の全ての部材が link 部材として選ばれる。1本の tree 部材を切断するように、与えられた系を二分割する方法は、よって n 個存在する。この切断線（面）と全部材との接合関係を示すものが、Tree Method における Basic Cut-Set Matrix, D, である。この行列の各 column matrix は、各切断線（面）に関係する部材をひろいあげ、また各 row matrix は、特に link 部材に関するそれは、各 link 部材の関係する切断線(面)をひろいあげる働きをする。よって、前者の考え方により、系を n 分割すれば、各部分系は1本の tree と数個の link 部材（tree 部材の切断線に関係した部材）よりなり、各部分系の間に存在した link 部材は、二つの column matrix に共通する部材として表わされる。また row matrix に注目して、系を部材数（= m）に分割すれば、各部分系として一本の tree 部材よりなる系が考えられ、それらの間の接続関係を表わすものとして、Basic cut-Set Matrix の link 部材に関する row matrix が考えられる。

以上のように、Basic Cut-Set Matrix, D, はその column あるいは row matrix において、系を tree 部材数 = 節点数，あるいは部材数に分割したときの基本系，および再結合の方法を示していることがわかる。

3. Tree Method の分割解析法

上記の二つの分割解析法について下に述べる。

3−1. 系を節点数に分割する方法

Tree Method の分割解析は、その stiffness matrix D^tKD の逆行列演算にあり、この点に的をしぼって述べる。ここで K; primitive stiffness matrix.

Dを節点数に分割すると．$D = [D_1, D_2, \cdots, D_i, \cdots, D_n]$ (1)

よって． $D^t K D = [D_i^t K D_j]$ (2)

系を節点数に分割し，それらが互に独立であるときの．全部分系の stiffness, $K^{(0)}$, は

$$K^{(0)} = [\diagdown D_i^t K D_i \diagdown] \quad (\text{但し}, \ i = 1, \cdots, n) \tag{3}$$

ここで $D_i^t K D_i = K_T^i + D_L^{it} K_L D_L^i$ (4)

i, j 両切断に関係した link 部材の剛性の和を K_{ij} とおく．

$$K_{ij} = D_L^{it} K D_L^j \tag{5}$$

i-th column に unit matrix II_i が位置し，他の要素が全て 0 である置換行列 Ω_i を導入する。

$$\Omega_i = [0, 0, \cdots, \mathrm{II}_i, 0, \cdots, 0] \tag{6}$$

(3), (5), (6) 式を用いると系全体の stiffness $D^t K D$ は次式のようになる。

$$D^t K D = K^{(0)} + \sum_{i,j}^{n} \Omega_i^t K_{ij} \Omega_j \tag{7}$$

$D^t K D$ の逆行列演算のかわりに，(7)式右辺に下式の Householder の公式を適用して，系の flexibility $(D^t K D)^{-1}$ を計算する。

$$(W + XYZ)^{-1} = W^{-1} - W^{-1} X (Z W^{-1} X + Y^{-1})^{-1} Z W^{-1} \tag{8}$$

独立な部分系の flexibility $F^{(0)} = [K^{(0)}]^{-1}$ は簡単に計算される．(8)式を(7)式に連続的に適用すると，最終的に系の flexibility matrix $F = (D^t K D)^{-1}$ が計算され，その kl-element は，

$$F_{kl} = F_{kl}^{(n)} = F_{kl}^{(n-1)} - F_{ki}^{(n-1)} Y_{ij}^{(n)} F_{jl}^{(n-1)} - [F_{kj}^{(n-1)} - F_{ki}^{(n-1)} Y_{ij}^{(n)} F_{jj}^{(n-1)}]$$
$$\times [Y_{ij}^{(n)-1} - F_{ii}^{(n-1)} Y_{ij}^{(n)} F_{jj}^{(n-1)}]^{-1} \cdot [F_{il}^{(n-1)} - F_{ii}^{(n-1)} Y_{ij}^{(n)} F_{jl}^{(n-1)}] \tag{9}$$

ここで $F_{ij}^{(n-1)}$ は，(8)式を $2(n-1)$ 回適用して計算された $F^{(n-1)}$ の ij 要素を示し，n は basic cut-set の数を示す．但し，$Y_{ij}^{(n)} = [K_{ij}^{(n)-1} + F_{ji}^{(n-1)}]^{-1}$ (10)

3－2．系を部材数に分割する方法．

Basic cut-set matrix の row matrix に注目すると．stiffness $D^t K D$ は

$$D^t K D = K_T + \sum_{i,j}^{m} D_L^{it} K_L^{ij} D_L^j \tag{11}$$

こまうでは，primitive stiffness $K_{ij} = 0$， よって，(11)式は下式のようになる。

$$D^t K D = K_T + \sum_{i}^{m} D_L^{it} K_L^{ii} D_L^i \tag{12}$$

(12)式は，系を構成する全ての部材のうち，Tree 部材より構成される Tree system に link 部材を1本づつ接合してゆく再結合方法を示す．Tree system の flexibility $F_T = [K_T]^{-1}$ は簡単に計算され，(12)式に，(8)式を連続的に適用すれば，系の flexibility $(D^t K D)^{-1} = F$ は計算される。

$$F = F^{(m)} = F^{(m-1)} - F^{(m-1)} D_L^{mt} [F_L^{mm} + D_L^m F^{(m-1)} D_L^{mt}]^{-1} D_L^m F^{(m-1)} \tag{13}$$

4．あとがき

骨組のもつ位相的特性より与えられる二つの双対的関係にある分割解析法を提案した。ここに示したのは，極限にまで系を分割する方法であるが，これらの一部を用いることにより，系の任意の二分割，三分割の基礎式を誘導することができる。ここに含まれる全ての逆行列演算は，平面，立体骨組について (3×3)，(6×6) の逆行列演算ですむ。

参考文献；1) F.H. Branin, "The Relation between Kron's Method and classical Methods of Network Analysis," I.R.E. WESCON Convention Record, Part 2, 1959. 2) I. Konishi, et al., "A Network-Topological Study on Statical Analysis of Rigid Framed Structure," Memoirs of the Faculty of Eng., Kyoto Univ., Vol. 31, Part 4, Oct. 1969