

大阪工業大学

正員 ○岡村宏一

東洋技研コンサルタントKK

正員 島田 功

1. まえがき: 3次元弾塑性非軸対称問題の分野には, 力学上, 多くの興味のある問題が含まれているにもかかわらず, その解析の困難さのため, 現在, ほとんど研究されていない。この種の問題に関し, 目下のところ有限要素法が唯一に近いアプローチの方法とみなされているようであるが, 計算機が大型化した昨今でも, その演算は困難である。このような見地からすれば, 有限要素法のみならず, より高精度, かつ実用的な解法が研究されてよいと思う。

さて, 筆者はすでに, 板, あるいはシャイベの弾塑性問題を高精度で解析できる1つの解法を発表した。¹⁾ この解法では, 非線形の基礎式の取扱いに因りて, 塑性変形に対応する物理量は, 板内点を囲む比較的小さい有限領域で平均値を持つものとみなし, 変形, 応力を十分な精度を持つ連続解で与える線形化の手法を用いた。一方, 3次元弾性問題の解析に有効な方法として, Mindlin のオ1, オ2問題の解を, 水平, 垂直, および斜め方向の有限な長方形面に積分したものを基本解とし, それらの組み合わせによって, 半無限弾性体内に任意の調整面, ならびに調整力の分布を与え, 任意の境界面を作り出すことのできる1つの実用解法を発表した。²⁾

本文は, これらの解法をさらに拡張して組み合わせた3次元弾塑性非軸対称問題の解析に有用と思われる1つの数值解法と, その応用例の1部について述べる。

2. 解法: 解法上の仮定として, 材料は等方性, かつ弾完全塑性体とし, 応力とひずみの関係は, Plandzle - Reuss の方程式に支配されるものとする。

さて, 3次元体の微小エレメントについて, 応力成分を $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ とし, 変位, および, ひずみのそれらを u, v, w , ならびに $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ とすれば, 全ひずみの変化速度 $\{\dot{\epsilon}\}$ は, 弾性, および塑性成分, $\{\dot{\epsilon}_e\}, \{\dot{\epsilon}_p\}$ からなるものとし, それを次のように書き表わす。

$$\{\dot{\epsilon}\} = \{\dot{\epsilon}_e\} + \{\dot{\epsilon}_p\} = [D]^{-1} \{\dot{\sigma}\} + \{\dot{\epsilon}_p\} \text{-----} (1)$$

式中, $[D]$ は弾性マトリックス, また, 以下の諸式で G はせん断弾性係数, $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, E : ヤング係数, ν : ポアッソン比とする。

いま, 降伏条件を塑性ポテンシャル f とすれば, $\{\dot{\epsilon}_p\}$ は flow rule により

$$\{\dot{\epsilon}_p\} = \mu \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \text{-----} (2) \quad \mu: \text{塑性変形中変化するスカラー量}$$

1) 岡村, 吉田: 大たねみ, およびリブの補剛を考慮した長方形鋼板の弾塑性解析, 土木学会論文報告集, No. 196, 1971.

2) 岡村, 島田: 3次元弾性問題の一数值解法とその応用, 同, NO. 199, 1972.

$$\text{したがって} \quad \{\dot{\epsilon}\} = [D]^T \{\dot{\sigma}\} + \mu \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \text{-----}(3)$$

ここで、微小エレメントに関する周知の釣合式を時間微分したのち、それらに、(3)より得られる応力成分の変化速度を代入し、さらに、0からtまでの時間積分を行えば、結局、釣合方程式は次のように書かれる。

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + G) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \right) + G \nabla^2 u &= - \int_0^t X(x, y, z) dt \\ (\lambda + G) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) + G \nabla^2 v &= - \int_0^t Y(x, y, z) dt \\ (\lambda + G) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + G \nabla^2 w &= - \int_0^t Z(x, y, z) dt \end{aligned} \right\} \text{-----}(4)$$

式(4)の右辺、すなわち、時間に関する積分項は、釣合方程式の性格から、Body Force と同様の意味を持つ物理量であることがわかる。また、それぞれの被積分関数は、塑性変形中の体積変化が0であることを考慮して以下のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} X(x, y, z) &= -G \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \right) \right\} \\ Y(x, y, z) &= -G \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \right) \right\} \\ Z(x, y, z) &= -G \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial f}{\partial \sigma_z} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \text{-----}(5)$$

ところで、本文では、降伏条件として von Mises Type のものを用いた。すなわち、

$$f = \frac{1}{2\sigma_p^2} \left\{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \right\} = 1 \text{-----}(6)$$

σ_p : 降伏応力

したがって、式(4)の時間積分を荷重段階jの和に置換すれば

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= \int_0^t X(x, y, z) dt = -\frac{2G}{\sigma_p^2} \sum_j \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu (2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) \right\} + 3 \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (\mu \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu \tau_{xz}) \right\} \right\}_j \\ \bar{Y} &= \int_0^t Y(x, y, z) dt = -\frac{2G}{\sigma_p^2} \sum_j \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu (2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z) \right\} + 3 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\mu \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu \tau_{yz}) \right\} \right\}_j \\ \bar{Z} &= \int_0^t Z(x, y, z) dt = -\frac{2G}{\sigma_p^2} \sum_j \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu (2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y) \right\} + 3 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\mu \tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu \tau_{yz}) \right\} \right\}_j \end{aligned} \right\} \text{---}(7)$$

前述のように、これら塑性変形に從属する物理量、 $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ は Body Force と同じ性格を持つ。ここで、前論文¹⁾で示した解法と同様な思想にもとづく手法を導入する。すなわち、弾性体内の塑性化した点(i)を包む比較的小さい有限な容積(図-2の $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$)では、これらの物理量は平均値を持つものとみなす。そうすれば、このような有限な容積内で均一な密度分布を持つ単位の Body Force ($\bar{X}_i = \bar{Y}_i = \bar{Z}_i = 1$) による弾性体内の任意点の応力、あるいは変位は、図-1に示すような Mindlin オ1, およびオ2 問題の解を、この容積に関して3重積分することによって得られる。この種の積分を遂行するにあたって、本文では、すでに前論文²⁾に示したように、長方形面に対しては厳密な2重積分を行ない、これに直角な方向の積分は和分による方法を用いた。

以上により、 i 点が塑性化した場合、この点における $\bar{X}_i$, $\bar{Y}_i$, $\bar{Z}_i$ の諸量を定めることができれば、 i 点の塑性変形が弾性体内の任意点の応力、および変位におよぼす影響値を求めることができる。

ところで、これら $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ は、式(7)に示されるように、未定係数 μ 、およびその時点での応力の 1 次微分を陰関数として含んでいる。

さて、 $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ を線形化するために、前論文¹⁾で示したように、部分的に差分法が用いられる。すなわち、塑性化した i 点、ならびに周囲の 6 点について図-3 に示すネットを考え、逐次計算のあな過程で、これら各点の応力の近似値が与えられたとすれば、 $\bar{X}_i$, $\bar{Y}_i$, $\bar{Z}_i$ はこの時点における各点の μ の 1 次関数として次のように表わされる。(もちろん、弾性域にある点では $\mu = 0$ である。)

$$\begin{aligned} (\bar{X}_i)_j = & -\frac{G}{\sigma_p^2} \left\{ \frac{1}{\Delta x} \{ \mu_{i(1,0)} (2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z)_{i(1,0)} - \mu_{i(0,0)} (2\sigma_x - \sigma_y \right. \\ & - \sigma_z)_{i(1,0)} \} + \frac{3}{\Delta y} \{ \mu_{i(0,1)} (\tau_{xy})_{i(0,1)} - \mu_{i(0,r)} (\tau_{xy})_{i(0,r)} \} \\ & + \frac{3}{\Delta z} \{ \mu_{i(0)} (\tau_{xz})_{i(0)} - \mu_{i(r)} (\tau_{xz})_{i(r)} \} \} \end{aligned} \quad (8)$$

$(\bar{Y}_i)_j$, $(\bar{Z}_i)_j$ も同様に求まるが、紙面の都合で省略する。

このようにして、塑性変形による応力、あるいは変位は μ を 1 次で含んだ連続解の形となる。さらに、外荷重による応力、あるいは変位として、*Boussinesq*, *Cerruti* の解を積分したものを用いて結合させる。各時点で、塑性化した各点における μ が、降伏条件 [式(6)] を満足するように繰返し計算によって定まり、同時に各点の応力が収束すれば問題は解決する。なお、3次元体内に境界面を持つ場合は、すでに、前論文²⁾で述べたような調整力の分布を与え、境界条件を同時に満足するようにこれらを定めればよい。

逐次計算の操作を簡単に述べる。いま、任意点 i で $f_i < 1$ ならば弾性経路であり、この時点では $\mu_i = 0$ である。塑性化しておれば $f_i = 1$ である。

さて、荷重段階 $j-1$ から j に移行する時点について説明する。ここで、 $j-1$ 段階におけるすべての諸量は確定したものとする。塑性項を $j-1$ 段階に止め、 j 段階に荷重を増加させ、この荷重増分に対して弾性解析が行はれて各要素のひずみ増分 $\Delta \epsilon$ と応力増分 $\Delta \sigma$ が求められる。そこで、 $(\sigma)_{j-1}$ に加えて $(\sigma)_{j1}$ を得る。 $(f)_{j1}$ を計算し、いくつかの点で $(f)_{j1} > 1$ になったとする。これらの塑性化した各点で $f = 1$ になるように、 $(\mu)_{j1}$ を次のように求める。 $(\sigma)_{j1}$ に対して、 $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ の 1 次近似値が $(\mu)_{j1}$ の 1 次関数として得られる。結局、 $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ のみによる応力の変化量 $\Delta \sigma$ が $(\mu)_{j1}$ の 1 次関数として表わされる。つぎに、 $\Delta \sigma$ により塑性ポテンシャルが $(\Delta f)_{j1}$ だけ変化するとすれば、塑性化した各点で $(f)_{j1} + (\Delta f)_{j1} = 1$ でなければならぬ。 $(\mu)_{j1}$ は $(\Delta \sigma)_{j1}$ の 2 次の

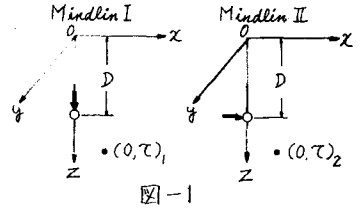


図-1

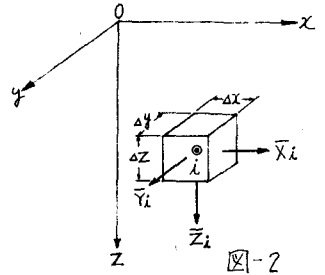


図-2

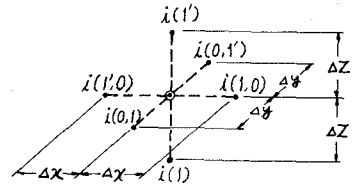


図-3

項を無視して線形化された降伏条件式により，塑性域にある各点で要求される下記の連立方程式から求まる。

$$1-(f)_{i,j}=\frac{1}{\sigma_p^2}\left\{(\sigma_x)_{i,j}(2\Delta\sigma_x-\Delta\sigma_y-\Delta\sigma_z)_{i,j}+(\sigma_y)_{i,j}(2\Delta\sigma_y-\Delta\sigma_x-\Delta\sigma_z)_{i,j}+(\sigma_z)_{i,j}(2\Delta\sigma_z-\Delta\sigma_x-\Delta\sigma_y)_{i,j}+6(\tau_{xy}\Delta\tau_{xy}+\tau_{yz}\Delta\tau_{yz}+\tau_{xz}\Delta\tau_{xz})_{i,j}\right\}-----(9)$$

再び， $\bar{X}$ ， $\bar{Y}$ ， $\bar{Z}$ を修正して収束するまで繰返し演算を行なう。

3 計算例： 計算例の1部を示す，ここに掲げた例題は，表面近くの局所的な塑性化の様様を調べる類のもので，半無限体が，その表面に正方形等分布荷重を受けの場合を計算した。材料の諸定数は鋼材のものを用いた。図-4は，載荷面の大きさと，分割された有限容積の配置を示したものである。

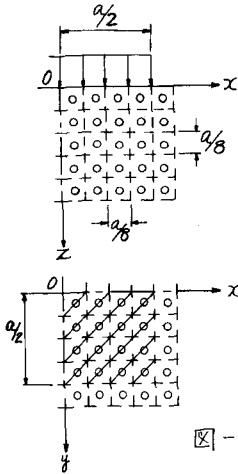


図-4

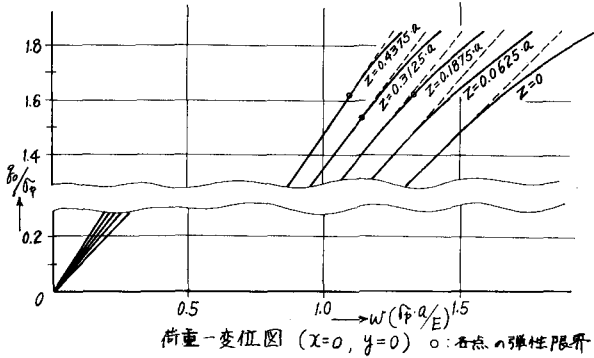


図-5

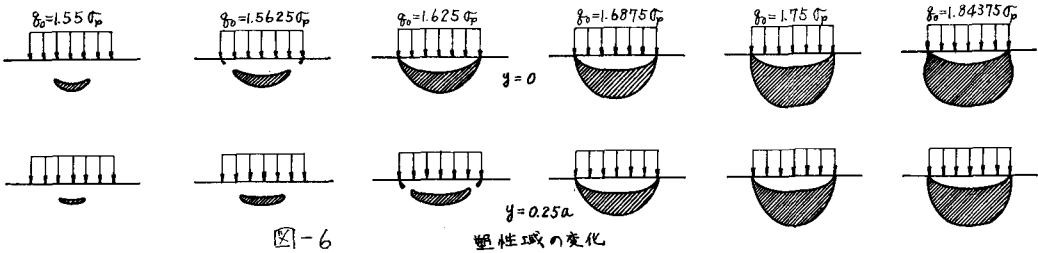


図-6

塑性域の変化

図-6に見るように，塑性化が進むにつれて臨界面の下端は球状になり，さらに塑性域の下方への拡大が停滞し，側方へふくれ出ようとする傾向を持つ。載荷面の直下には弾性域が残存するが，かなり扁平な形である。図-5は変位を示したものである。載荷面の中心点の変位は，弾性勾配より若干傾斜した形で増加しているが，図の状態では大きな流動は生じていない。これは，非圧縮性に近くなっている塑性域を，外側の弾性部分が包みこんでいるためではないかと思う。ところで，本解法は基本的に連続解を用いているので，本例題では，連立方程式を形成する未知量は塑性化した点の μ のみである。目下，この解法を発展させるための検討を続けており，機会があれば報告したい。