二次元弾性問題の基本解を用いた境界値問題のリラクゼーション解法

京都大学工学部　正員　丹羽義次
京都大学工学部　正員　小林昭一
京都大学大学院　学生員○大本俊彦

1. はじめに

二次元弾性境界値問題はこれまで種々の方法によってその解析が試みられてきた。代表的なものは，等角写像を用いる方法，あるいは級数展開を用いる方法などである。しかしこれらの解法は適当な写像関数や方程式の一般解がうまく見つかったときのみ有効である。

これに対し我々がここで取り扱う方法（リフレクション法[1)]）は，無限弾性体の基本解を重ね合せの理論を用いることによって，多連結領域かつ任意形状のあらゆる境界条件の弾性問題を扱うことができ，計算時間も他の方法に比して非常に短かいという特徴がある。今後，この理論が拡されて広く応用されることが期待される。

2. 解析法

本論では以下二次元問題についてのみ述べることとする。

弾性問題の境界値問題を解くために必要なことは，弾性体内においては場の方程式を満たし，境界においては与えられた境界条件を満すことである。

Fig.1は，いま考えている弾性体と同じ境界を無限弾性体の中に想定したものである。いま無限弾性体内の境界上に作用させた集中荷重または分布荷重によって生ずる任意の点の応力や変位が分っているものとする。境界S上の任意の点Rの応力および変位は，境界Sに作用させた荷重$P_1, P_2, \cdots Q_1, Q_2, \cdots$の解（応力および変位）の重ね合せによってもとめられる。この時得られた応力および変位が与えられた境界値と等しければ，この境界値問題は解けたことになる。

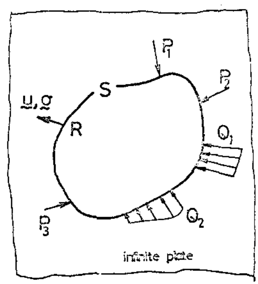

Fig. 1

リフレクション法は上述のような荷重として有限個の荷重を採用し，それらの向きと大きさを計算することにより，これらの重ね合せとして弾性境界値問題を解こうとする方法である。

○無限板内の集中荷重による弾性基本解

$$\text{応力}：\ \sigma_r = -\frac{1+\nu}{4\pi}\cdot\frac{P\cos\theta}{r},\quad \sigma_\theta = \frac{1-\nu}{4\pi}\cdot\frac{P\cos\theta}{r},\quad \tau_{r\theta} = \frac{1-\nu}{4\pi}\cdot\frac{P\sin\theta}{r}$$

$$\text{変位}：\ u = -\frac{(1+\nu)(3-\nu)}{4\pi E}\log\frac{r}{c}P\cos\theta,\quad v = \frac{1+\nu}{4\pi E}\left\{(1+\nu)+(3-\nu)\log\frac{r}{c}\right\}P\sin\theta$$

○基本解の重ね合せ（Fig.2）

$(\hat{N}_j, \hat{T}_j), (\hat{U}_j, \hat{V}_j)$；弾性体内の実荷重による分割$(j)$への伝達力および変位

$(\bar{N}_{ji}, \bar{T}_{ji}), (\bar{U}_{ji}, \bar{V}_{ji})$；分割$(i)$の分割$(j)$への伝達力および変位

$(N_{j0}, T_{j0}), (U_{j0}, V_{j0})$；分割$(j)$での境界条件

N, U ; normal　, T, V ; tangential

$$
\begin{cases}
N_{j0} = \hat{N}_j + \sum_{i=1}^{n} \bar{N}_{ji} = \hat{N}_j + \sum_{i=1}^{n} (a_{ji} N_i + b_{ji} T_i) \\
T_{j0} = \hat{T}_j + \sum_{i=1}^{n} \bar{T}_{ji} = \hat{T}_j + \sum_{i=1}^{n} (c_{ji} N_i + d_{ji} T_i)
\end{cases}
,\quad
\begin{cases}
U_{j0} = \hat{U}_j + \sum_{i=1}^{n} \bar{U}_{ji} = \hat{U}_j + \sum_{i=1}^{n} (A_{ji} N_i + B_{ji} T_i) \\
V_{j0} = \hat{V}_j + \sum_{i=1}^{n} \bar{V}_{ji} = \hat{V}_j + \sum_{i=1}^{n} (C_{ji} N_i + D_{ji} T_i)
\end{cases}
$$

ここに　$i \neq j$ で

$$
\begin{cases}
a_{ji} = -\frac{1}{2\pi r_{ij}} \left\{ \left(\frac{1+\nu}{2} + \cos 2\theta_{ji} \right) \cos\theta_{ij} + \frac{1-\nu}{2} \sin\theta_{ij} \sin 2\theta_{ji} \right\} \\
b_{ji} = -\frac{1}{2\pi r_{ij}} \left\{ \left(\frac{1+\nu}{2} + \cos 2\theta_{ji} \right) \sin\theta_{ij} - \frac{1-\nu}{2} \cos\theta_{ij} \sin 2\theta_{ji} \right\} \\
c_{ji} = -\frac{1}{2\pi r_{ij}} \left\{ \cos\theta_{ij} \sin 2\theta_{ji} - \frac{1-\nu}{2} \sin\theta_{ij} \cos 2\theta_{ji} \right\} \\
d_{ji} = -\frac{1}{2\pi r_{ij}} \left\{ \sin\theta_{ij} \sin 2\theta_{ji} + \frac{1-\nu}{2} \cos\theta_{ij} \cos 2\theta_{ji} \right\}
\end{cases}
,\quad
\begin{cases}
A_{ji} = -\frac{1+\nu}{4\pi E} \left[(3-\nu) \log\frac{r_{ij}}{d} \cos\theta_{ij} \cos\theta_{ji} + \left\{ (1+\nu) + (3-\nu) \log\frac{r_{ij}}{d} \right\} \sin\theta_{ij} \sin\theta_{ji} \right] \\
B_{ji} = -\frac{1+\nu}{4\pi E} \left[(3-\nu) \log\frac{r_{ij}}{d} \sin\theta_{ij} \cos\theta_{ji} - \left\{ (1+\nu) + (3-\nu) \log\frac{r_{ij}}{d} \right\} \cos\theta_{ij} \sin\theta_{ji} \right] \\
C_{ji} = -\frac{1+\nu}{4\pi E} \left[(3-\nu) \log\frac{r_{ij}}{d} \cos\theta_{ij} \sin\theta_{ji} - \left\{ (1+\nu) + (3-\nu) \log\frac{r_{ij}}{d} \right\} \sin\theta_{ij} \cos\theta_{ji} \right] \\
D_{ji} = -\frac{1+\nu}{4\pi E} \left[(3-\nu) \log\frac{r_{ij}}{d} \sin\theta_{ij} \sin\theta_{ji} + \left\{ (1+\nu) + (3-\nu) \log\frac{r_{ij}}{d} \right\} \cos\theta_{ij} \cos\theta_{ji} \right]
\end{cases}
$$

$i = j$ で

$$
a_{ii} = d_{ii} = -\frac{1}{2h_i}, \quad b_{ii} = c_{ii} = 0 \quad , \qquad r_{ii} = -\frac{h_i}{c}
$$

○リラクゼーションによる数値計算

(i) N_1, T_1 の第1次近似

$$N_1^{(1)} = 2(\hat{N}_1 - N_{10}), \quad T_1^{(1)} = 2(\hat{T}_1 - T_{10})$$

(ii) N_j, T_j の第1次近似

$$N_j^{(1)} = 2\left(\hat{N}_j - N_{j0} + \sum_{i=1}^{j-1} N_{ji}^{(1)}\right), \quad T_j^{(1)} = 2\left(\hat{T}_j - T_{j0} + \sum_{i=1}^{j-1} T_{ji}^{(1)}\right)$$

(iii) (ii)の計算を $j = n$ まで行ない，次に $j = 1$ から(i)(ii)の計算を繰り返す。

以上の繰り返し計算を N_j, T_j の値が収束するまで行なう。

混合境界値問題の場合，変位を荷重で置き替えて計算する。

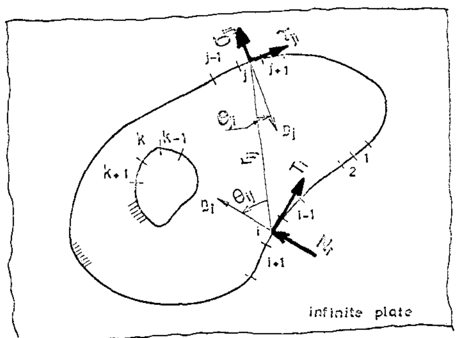

Fig. 2

3．解析例

円板の圧縮について の例を右図に示す。

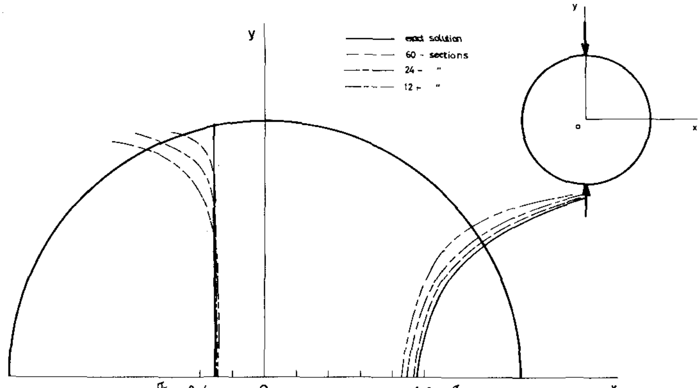

Fig. 3

文献　1) Chicurel,R.and Suppinger,E.W.;The Reflection Method in Elasticity and Bending of Plates,ZAMP,15, pp.629-638,1964