I−8

変形する固体の解析モデルに関する2,3の考察

京都大学工学部　正員　小林昭一

1.はじめに

計算機の大型化に伴って，最近では相当複雑な条件の下でも計算が可能となり，解析対象ならびにそれに対するモデルも次第に複雑なものになって来た。　しかしながら，変形する固体の解析モデルに関しては未だ不十分な点もあり，モデルの重要性に対する認識も，また解析結果に対する解釈も十分ではないように思われる。　モデル化の過程には対象とする物理現象を，その特性を抽出した物理モデルに変換する操作が含まれるので，目的とする対象物の物理現象を前もってどれだけ把握できているかによって，また何をどの程度の精度でもって解析するかによってモデルが異なってくることになる。

固体の解析モデルを大別すると，a)固体材料の特性に関するモデルと，b)材料の集合体ないし連続体としての機能に関するモデルに分けることができる。　前者は，材料の構成式に関するモデル化であり，後者は場のモデル化と見ることができよう。　この両者は独立なものではなく，程度の差こそあれ両者が相まって物理現象をより適確に表現するモデルがつくられるわけである。　逆に言えば，モデル化如何によって，対象とする物理現象の把握の度合が異なってくることになり，少し極端な言い方をすれば，モデル化の段階ですでに結果が予測されるということでもある。　本文ではこのような認識の上にたって，変形する固体の解析モデルについて考察してみようと思う。

2.変形する固体の解析モデル

変形する固体というはんちゅうに含まれるものは極めて多いが，これらのモデル化は上述のように大別されるので，先ずそれぞれについて検討してみよう。

a)材料特性に関するモデル化：　材料特性は個々の材料により異なっており，従ってそのモデル化には，個々の材料の特性に関する知識が要求される。　材料特性に関する研究は最近長足の進歩を遂げて来ており，応力，応力勾配，ひずみ，ひずみ勾配，マイクロ・モーメント，マイクロ・ローテーションなどを，更には温度，時間効果などをも含む構成式が導かれている。　また，破壊の規準に関しても種々の形のものが提案されている。　これらをどのような形で，どの程度まで材料モデルに取り入れるかは，解析の対象物との関連も同時に考慮して決定されなければならない問題である。　最もよく取り扱われているモデルとしては，数理解析的には，弾性体，塑性体，粘弾性体，Cosserat物体などのうち比較的簡単なものである。　これに対して数値解析的には，更に複雑なモデルの取り扱いが可能であり，種々の相当複雑な拘束条件の下でも構成式を適当にモデル化して用いているようである。　なかでも，力学的，幾何学的ならびに時間的にも非線形なモデルの適用がstep-by-stepの数値計算では比較的容易である。　具体的なモデルの例については，当日言及する。

b)材料の集合体，連続体としてのモデル化：　これらは広い意味では場のモデル化であり，数理解析的には，微分，差分あるいは積分方程式などによる表示が行なわれており，また

数値解析的にはこれらを部分的に連続な関数で置き換えたモデルが考えられている。いずれの場合にも力の釣り合いと変形の適合性ならびに構成材料の特性が満されていなければならない。しかし，実在の変形固体に対して，これらを全て満す状態（場）を見出すことは必ずしも容易ではない。このような場合には，一般に程度の差こそあれ有限個の点で場を満すような解（状態）を求めるのが普通である。解の精度は注目する場で，如何に多くの点で，如何によくこれらの条件を満しているかということによって決まる。一般に場の数値解析モデルとしては，連続系モデルならびに集中系モデルが考えられるが，前者は数値解析的な取り扱いが煩雑であるので，普通には対象とする系の対象とする物理特性を失なわないと想定される範囲で集中系ないしは部分的な連続系の集合に置換される。それらの代表的な例としては，差分法，ランプド・マス法，有限要素法などがあげられる。この場合には，場をどのような形，すなわちどのような密度で満足するかは予め想定しなければならない。この想定の如何によって，場を満足する空間ならびに時間座標（点）が異なる訳である。数値解析では，このような意味において連続場の精度が異なっていることになる。この場を満足する点の間隔が極めて小さくなると，直感的に解は真のものに近づくと考えられる。しかしながら，この場合にも，力の釣り合い，変形の適合条件ならびに構成式を全て満していなければ，真の解にはなり得ないことに注意しなければならない。ここでは種々のモデルについて検討する余裕はないので，簡単なモデル化を例に取って，剛構造体と連続体を比較してみるに止める。

3. 剛構造体の解析モデルと連続体の解析モデル

図-1

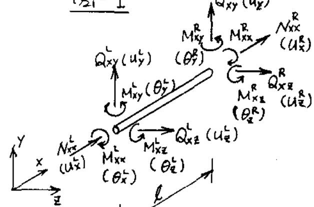

図-2

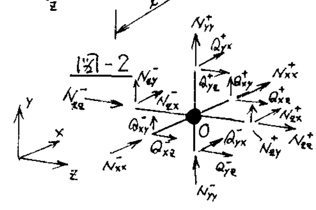

図-1のような弾性棒要素について力と変位の関係を導けば次のようになる。[1]

$$
\begin{pmatrix} N^L_{xx} \\ Q^L_{xy} \\ Q^L_{xz} \\ M^L_{xx} \\ M^L_{xy} \\ M^L_{xz} \\ N^R_{xx} \\ Q^R_{xy} \\ Q^R_{xz} \\ M^R_{xx} \\ M^R_{xy} \\ M^R_{xz} \end{pmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\frac{EA}{\ell} & & & & & & & & & & & \\
0 & \frac{12EI_z}{\ell^3(1+\Phi_y)} & & & & & & & \text{Symmetric} & & & \\
0 & 0 & \frac{12EI_y}{\ell^3(1+\Phi_z)} & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{\ell} & & & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{-6EI_y}{\ell^2(1+\Phi_z)} & 0 & \frac{(4+\Phi_z)EI_y}{\ell(1+\Phi_z)} & & & & & & & \\
0 & \frac{6EI_z}{\ell^2(1+\Phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\Phi_y)EI_z}{\ell(1+\Phi_y)} & & & & & & \\
\frac{-EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & & & & & \\
0 & \frac{-12EI_z}{\ell^3(1+\Phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{\ell^2(1+\Phi_y)} & 0 & \frac{12EI_z}{\ell^3(1+\Phi_y)} & & & & \\
0 & 0 & \frac{-12EI_y}{\ell^3(1+\Phi_z)} & 0 & \frac{6EI_y}{\ell^2(1+\Phi_z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{\ell^3(1+\Phi_z)} & & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{-GJ}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{\ell} & & \\
0 & 0 & \frac{-6EI_y}{\ell^2(1+\Phi_z)} & 0 & \frac{(2-\Phi_z)EI_y}{\ell(1+\Phi_z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{\ell^2(1+\Phi_z)} & 0 & \frac{(4+\Phi_z)EI_y}{\ell(1+\Phi_z)} & \\
0 & \frac{6EI_z}{\ell^3(1+\Phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(2-\Phi_y)EI_z}{\ell(1+\Phi_y)} & 0 & \frac{-6EI_z}{\ell^2(1+\Phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\Phi_y)EI_z}{\ell(1+\Phi_y)}
\end{bmatrix}
\begin{pmatrix} u^L_x \\ u^L_y \\ u^L_z \\ \theta^L_x \\ \theta^L_y \\ \theta^L_z \\ u^R_x \\ u^R_y \\ u^R_z \\ \theta^R_x \\ \theta^R_y \\ \theta^R_z \end{pmatrix}
$$

ここに $\Phi_y=\frac{12EI_z}{GA_{sy}\ell^2}$ ，$\Phi_z=\frac{12EI_y}{GA_{sz}\ell^2}$ である。このような棒要素が例えば図-2に示すようにO点で剛結されているとし，質量がO点に集中していると考えると，釣り合い式として次式を得る。

$$N^+_{xx}+N^-_{xx}+Q^+_{yx}+Q^-_{yx}+Q^+_{zx}+Q^-_{zx}=M_x\ddot{u}^o_x\,,\cdots\cdots,\quad M^+_{xx}+M^-_{xx}+M^+_{yx}+M^-_{yx}+M^+_{zx}+M^-_{zx}=L_x\ddot{\theta}_x\,,\cdots\cdots$$

これらの式に，上式の $N_{xx},\cdots, M_{xx},\cdots$ などを代入すると，ランプド・マス系に対する運動方程式が求められる。この式は，$\ell\rightarrow 0$ とすることにより，マイクロポーラー弾性体の運動方程式と相似となる。換言すれば，後者の連続体の差分表示と見ることができる。これらの相似関係の詳細ならびにその他のモデルについては当日検討する予定である。

1) Przemieniecki, J.S.: Theory of Matrix Structural Analysis, p.79, McGraw-Hill,