

大阪工業大学

正員 岡村宏一

東洋技研コンサルタントKK

正員 ○島田 功

1. まえがき： 部分的に補剛された3次元弾性体の実用解法を開発することは、鉄骨で補剛されたコンクリート構造、あるいは地盤内の杭とか、埋設物などの多くの問題の3次元解析を行なう上で有用であろう。しかしながら、このような部分的な剛性変化を持つ3次元体の問題を、異方性体のような平均化したモデルで扱うことには、仮定の上で問題があるように思われる。

さて、筆者は、本学会に提出した別文¹⁾において、3次元弾塑性非軸対称問題を扱う1つの数值解法を提案した。ところで、この問題を3次元弾性体内における部分的弱化的問題とみなすならば、標記の問題は、同様に、部分的強化の問題としてとらえることができよう。もちろん、3次元体内に配置される補剛材の形状は多様であり、この形状に対応する内部的な境界値問題を厳密に扱うことは実用上、非常な困難をとまなう。しかしながら、このような部分的補剛の条件を、局所的に、ある程度平均化された特性としてとらえた3次元解析を行なったのち、スライスされた2次元問題、あるいは局所的な問題に帰結させて取扱うのも1つの方法であろう。本文は、このような見地に立って、部分的な補剛条件を内蔵する3次元弾性問題の1つの数值解法とその応用例の一部について述べるものである。

2. 解法： 三次元体の微小エレメントについて、応力(σ)を $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$, 変位および歪(ϵ)を $u, v, w, \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ とすると、応力-歪の関係は、

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} \text{-----}(1)$$

$$[D] = \text{弾性マトリックス} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{26} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & \cdots & a_{66} \end{bmatrix}$$

ただし a : 弾性係数
 $a_{ij} = a_{ji}$

$[D_0]$ を基本となる弾性マトリックス(等方性弾性体)とし

$$[D] = [D_0] + [\Delta D] \text{-----}(2)$$

のように分離すると (1) 式は

$$\{\sigma\} = [D_0]\{\epsilon\} + [\Delta D]\{\epsilon\} \text{-----}(3)$$

ここで

$$[D_0] = \begin{bmatrix} 2G_0 + \lambda_0 & \lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_0 & 2G_0 + \lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_0 & \lambda_0 & 2G_0 + \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_0 \end{bmatrix}$$

ただし

$$G_0 = \text{せん断弾性係数} \left(= \frac{E}{2(1+\nu_0)} \right) \\ E_0 : \text{ヤング率} \quad \nu_0 : \text{ポアソン比} \\ \lambda_0 = \frac{\nu_0 E_0}{(1+\nu_0)(1-2\nu_0)}$$

1) 岡村, 島田 : 3次元弾塑性非軸対称問題の一数值解法, 本学会に提出した別文

そこで、釣合条件式は次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} (\lambda_0 + G_0) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \right) + G_0 \nabla^2 u &= - \left(\frac{\partial \delta_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}^*}{\partial z} \right) = -\bar{X} \\ (\lambda_0 + G_0) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) + G_0 \nabla^2 v &= - \left(\frac{\partial \delta_y^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial x} \right) = -\bar{Y} \\ (\lambda_0 + G_0) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + G_0 \nabla^2 w &= - \left(\frac{\partial \delta_z^*}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial y} \right) = -\bar{Z} \end{aligned} \right\} \text{----- (4)}$$

ただし $\{\rho^*\} = [\Delta D] \{\varepsilon\}$

$\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ は弾性マトリックスの変化量の従属関数であり、釣合条件式の性格から、Body Force と同様の意味をもつ物理量であることがわかる。したがって、補剛材によって強化されない部分では、(4)式において、 $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ は 0 である。一般に 3 次元問題において、解の見出されている基本的な Case は等方性弾性体の場合である。よって (4) 式の解は変数を分離して、

$$\left. \begin{aligned} u &= u_1 + u_2 \\ v &= v_1 + v_2 \\ w &= w_1 + w_2 \end{aligned} \right\} \text{----- (5)}$$

また

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_1\} + \{\varepsilon_2\} \text{----- (6)}$$

とし、 (u_1, v_1, w_1) は (4) 式の右辺を 0 とした解として与える。すなわち、荷重に対し、ある境界を持つ解（筆者がすでに報告した、表面荷重、ならびに他の面の境界調整を含む解²⁾）であり、本問題においては、特解としての性格を持つ解となる。 (u_2, v_2, w_2) は、

$$\left. \begin{aligned} (\lambda_0 + G_0) \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial z} \right) + G_0 \nabla^2 u_2 &= -\bar{X} \\ (\lambda_0 + G_0) \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y \partial z} \right) + G_0 \nabla^2 v_2 &= -\bar{Y} \\ (\lambda_0 + G_0) \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2} \right) + G_0 \nabla^2 w_2 &= -\bar{Z} \end{aligned} \right\} \text{---- (7)}$$

(7) 式は、明らかに $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ の各項に解 u, v, w の微分項を含む複雑な形になっており、厳密解はとうてい得られない。しかし前述のように、これらは Body Force と同じ性格を持つ。そこで別文¹⁾で示した解法と同様な手法にもとづく方法を導入する。すなわち図-2に示すように、強化される点 (i) を包む比較的小さい有限な容積 $(\Delta x \times \Delta y \times \Delta z)$ では、これらの物理量は平均値をもつものとみなす。そうすれば、ここに単位の強さ $\bar{X}_i = 1$, $\bar{Y}_i = 1$, $\bar{Z}_i = 1$ を持つ Body Force が働いた時の u_2, v_2, w_2 は、図-1に示す Mindlin 解の 3 重積分によって求まる。この種の積分を遂行するにあたって、本文では、すでに前論文²⁾に示したように、長方形面に対しては厳密な 2 重積分を行

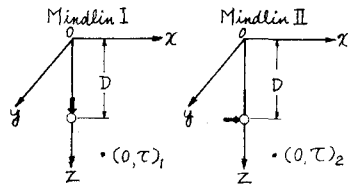


図-1

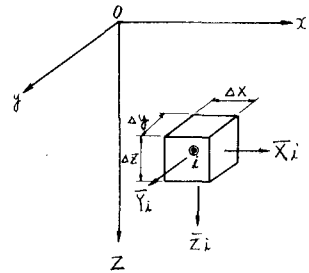


図-2

ない、これに直角な方向の積分は和分による方法を用いた。これを

$$u_2(\bar{X}_i=1) = U_{2i}, \quad u_2(\bar{Y}_i=1) = U'_{2i}, \quad u_2(\bar{Z}=1) = U''_{2i} \quad \text{----- (8)}$$

とすれば、

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= \sum_i (\bar{X}_i U_{2i} + \bar{Y}_i U'_{2i} + \bar{Z}_i U''_{2i}) \\ \text{同様に} \\ v_2 &= \sum_i (\bar{X}_i V_{2i} + \bar{Y}_i V'_{2i} + \bar{Z}_i V''_{2i}) \\ w_2 &= \sum_i (\bar{X}_i W_{2i} + \bar{Y}_i W'_{2i} + \bar{Z}_i W''_{2i}) \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (9)}$$

ここで $\sum_i$ は補剛枝により強化されるすべての点における、平均化された物理量の影響の重ね合せである。さて、 $\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i$ は次のような近似法により表現する。図-3に示すように、強化された点の周囲に部分的な差分ネットを組み(4)式で与えられる $\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i$ は*i*点を囲む点の歪(ε)および、弾性マトリックスの変化量 $[\Delta D]$ を用いて差分表示することによって、 ε_2 に関する1次関数の形で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}_i &= \frac{1}{2\Delta x} (\sigma_{xi(1,0)}^* - \sigma_{xi(1,0)}^*) + \frac{1}{2\Delta y} (\tau_{xyi(0,1)}^* \\ &\quad - \tau_{xyi(0,1')}^*) + \frac{1}{2\Delta z} (\tau_{zx i(1)}^* - \tau_{zx i(1')}^*) \\ \bar{Y}_i &= \frac{1}{2\Delta y} (\sigma_{yi(0,1)}^* - \sigma_{yi(0,1')}^*) + \frac{1}{2\Delta z} (\tau_{yz i(1)}^* \\ &\quad - \tau_{yz i(1')}^*) + \frac{1}{2\Delta x} (\tau_{xy i(1,0)}^* - \tau_{xy i(1,0')}^*) \\ \bar{Z}_i &= \frac{1}{2\Delta z} (\sigma_{zi(1)}^* - \sigma_{zi(1')}^*) + \frac{1}{2\Delta x} (\tau_{zx i(1,0)}^* \\ &\quad - \tau_{zx i(1,0')}^*) + \frac{1}{2\Delta y} (\tau_{yz i(0,1)}^* - \tau_{yz i(0,1')}^*) \end{aligned} \right\} \quad \text{---(10)}$$

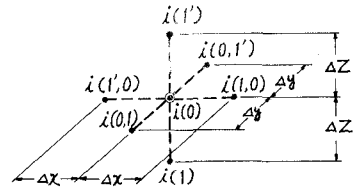


図-3 *i*点 [*i*(0)]を囲む6個の点の指標

$$\text{ただし } \{\sigma_i^*\} = [\Delta D_i] \{ \varepsilon_{1i} + \varepsilon_{2i} \}$$

3. 計算方法: まず荷重による各点の弾性解 u_i, v_i, w_i および歪 $\{\varepsilon_1\}$ を定め、補剛枝により強化された部分においては、単位のBody Force $\bar{X}_i=1, \bar{Y}_i=1, \bar{Z}_i=1$ を作用した場合の各点の影響値(ε_2)を求めておけば、強化された各点で要求される下記の連立方程式から(ε_2)を求めることができる。

$$\varepsilon_2 = \sum_i \{ \bar{\varepsilon}_2(\bar{X}_i=1) \cdot \bar{X}_i + \bar{\varepsilon}_2(\bar{Y}_i=1) \cdot \bar{Y}_i + \bar{\varepsilon}_2(\bar{Z}_i=1) \cdot \bar{Z}_i \} \quad \text{----- (11)}$$

ただし $\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i$ は(10)式に示した $[\Delta D]$, $\{\varepsilon_{1i} + \varepsilon_{2i}\}$ を含む差分式である。

これらの解より強化された部分で評価されねばならない $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ が求まる。これらの作用により、調整力によって作られた境界条件は乱されるので再び、境界調整を修正する。以上の過程を繰返し、境界および補強された部分が収束するまで計算し、補剛枝を

部分的に内蔵する構造物が解析される。

4. 計算例: この方法を用いて、図-4に示すような1本の鉛直補剛材を半無限弾性体内に設け、その補剛材に荷重 q_0 を作用した場合の応力および、変形の解析を行った。補剛材のヤング率を、半無限弾性体のそれの、2, 5, 10 倍に増加したときの補剛材内および、その下の応力 σ_z 、および表面の変形状態を図-5に示した。ただし補剛材および、半無限弾性体のポアソン比は、それぞれ 0.3, 0.2 である。なお、この計算において、鉛直補剛材の上端の部分において、応力に若干の乱れを生じたので、この部分の値を保留した。これは *negative Friction* 的な集中現象ではないかと思っているが、目下、精度の面から検討中である。

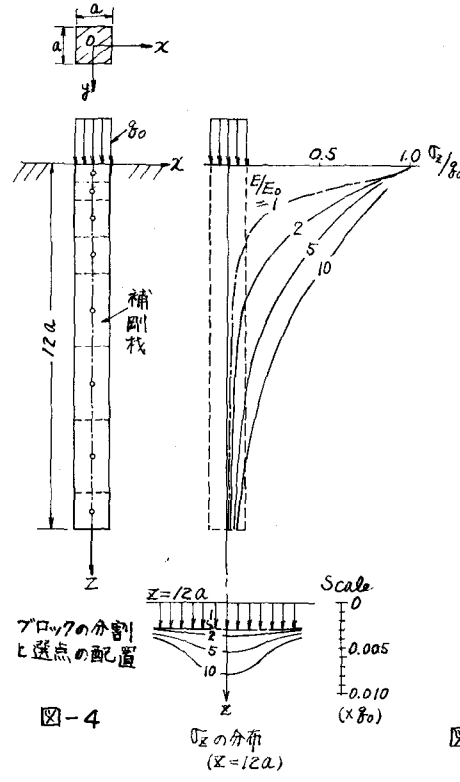


図-4

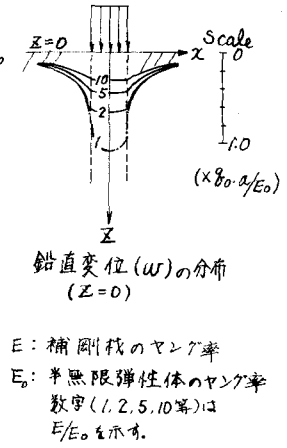


図-5