I－3

板特性のネットワークへの置換に関する一考察

京都大学　正員　小西一郎　京都大学　正員　白石成人
京都大学　学生員　谷口健男　京都大学○学生員　古田均
京都大学　横田信録

1. まえがき

骨組構造物の解析において、ネットワークトポロジー的性質に注目する解析法がある。これは構造物内の結合関係、たとえば節点と部材との接続の有無などを解析過程に考慮することにより組織的な解法を導いたものである。この節点と部材との関連は branch node incidence matrix で表わされる。本研究ではこのネットワークトポロジーの考え方を連続体、ここでは特に板の解析に拡張することを目的とし、与えられた系を有限の要素に分割し、それが基本の系であると考え、branch node incidence matrix がそのまま適用できるネットワークモデルに置き換えることにより、電子計算機に適合した解析法を導いている。また、系が有限の要素に分割され、ある点について考えると、その点への影響はその点を含む要素内の諸節点からの影響しか考慮されていないことより生じる剛性の減少を同一節点を有するネットワークの重ね合せにより補うことを試みている。

2. ネットワークモデルおよび解析法

図-1 Network Model (I)

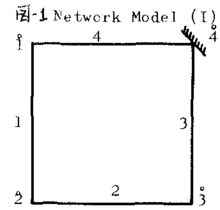
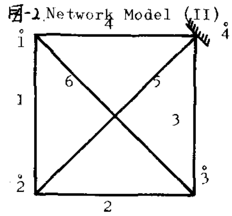


図-2 Network Model (II)



与えられた系を有限の矩形要素に分割する。このとき要素は4個の節点と4個の周辺とよりなる。この板の要素の剛性K^eは、下式のように与えられることがわかっている。[1]

$$K^e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ & k_{22} & k_{23} \\ sym. & & k_{33} \end{bmatrix} \quad \text{----- (1)}$$

ただし、1つの節点は datum point と考えている。

いま、この板要素の剛性と等価なネットワークを考えてみる。4個の節点と4個の周辺のモデルとしては、4本の部材よりなる図1のモデルがまず考えられる。このモデルの joint stiffness matrix $\tilde{K}$ を計算すると、節点 1-3 間には直接の接続関係が存在しないことより(1)式の k_{13} に当たる行列要素が0となる。いま一度K^eを考えると、K^eの行列要素は板の連続体という性質よりも明らかなようにすべて0ではなく値をもつ。よって、図1のモデルは(1)式に等価なネットワークとはいえない。そこで、branch node incidence matrix で接合関係を表わすには2節点間に1部材が必要なことより、4本の部材よりなるモデルに対角の節点間の影響を考慮さすための2本の斜材を追加さすことが必要となり、ネットワークモデルとしては図2の最小6本の仮想の部材をもつものが妥当であると思われる。ここで図2のモデルの branch node incidence matrix を A、primitive stiffness matrix を K とし、joint stiffness matrix $\tilde{K}$ を求め、(1)のK^eと等価におくと、

$$\tilde{K} = A^t K A = \begin{bmatrix} k_1+k_4+k_6 & -k_1 & -k_6 \\ -k_1 & k_1+k_2+k_5 & -k_2 \\ -k_6 & -k_2 & k_2+k_3+k_6 \end{bmatrix} \equiv K^e \quad \text{---- (2)}$$

(2)式より primitive stiffness matrix K が求まる。

$$K=\begin{bmatrix} k_1 & & & & & 0 \\ & k_2 & & & & \\ & & k_3 & & & \\ & & & k_4 & & \\ & & & & k_5 & \\ 0 & & & & & k_6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -k_{12} & & & & & 0 \\ & -k_{23} & & & & \\ & & k_{31}+k_{32}+k_{33} & & & \\ & & & k_{11}+k_{12}+k_{13} & & \\ & & & & k_{21}+k_{22}+k_{23} & \\ 0 & & & & & -k_{13} \end{bmatrix} \quad \text{------} \ (3)$$

ただし.
k_i は i-部材の stiffness

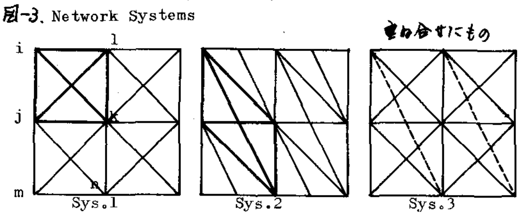
この(3)式の K を従来のネットワークトポロジーの解析の基礎式[(2)]に適用する

$$P=A^tKA\cdot u \quad \text{or} \quad u=(A^tKA)^{-1}P \quad \text{-----} \ (4)$$

P：節点荷重. u：節点変位. t：転置

3. 同一節点をもつネットワークの重ね合せによる剛性の減少の補足

図-3. Network Systems



ネットワークの重ね合せによる剛性の減少の補足の研究としては.新開.佐武の研究[3]がある。この研究では要素の分割法を種々変えたネットワークに重みを考慮して重ね合せているが、各分割法において節点が一組に統一されていないので重ね合されたネットワークに荷重をかけたとき各ネットワークが別々に変位する可能性が生じることとなり.この方法では各種の分割法の平均的な値がでるにすぎず十分なる剛性の補足とはいいがたい。そこでこのメカニズムの違いによる変位の不同一性という欠点を除くには.同一節点をもち分割の異なるネットワークを重ね合せることが妥当であると思われる。本研究ではその一例として.図3の sys.1 と sys.2 を重ね合せることを提案する。sys.1 では考慮されなかった i-n 間の影響を j-k 線分が切断されていない sys.2 のネットワークを重ね合せることにより考慮をする。このようにすれば少なくとも隣接する要素の節点間の影響を導入することができ.板のもつ連続体としての性質に近づくことになる。この考え方を逐次適用していけば剛性の減少の補足がなされると思われる。sys.3 の重ね合せたネットワークをみると.破線部以外の部材は両 system において重複をしているので.結局.破線部の部材を sys.1 に新たに追加してやればよいと思われる。これは参考文献(4)の研究により簡単に計算できる。

4. 考察およびあとがき

板解析にネットワークトポロジーの性質を導入し.組織的解法を導いた。他に板解析にこの性質を利用した研究には前記の新開.佐武のものがあるが.この研究では有限要素法に基盤をおいており.その剛性行列は変化させずに要素と節点との接続関係を考えているので.その incidence matrix は従来のものと異なり element node incidence matrix ともいうべきものとなっている。しかし.本研究とは incidence matrix は異なるが.結果的には図3の sys.1 の段階の系の全体の剛性行列はその行列要素が完全に一致をし.両研究が等価であることは明らかである。

参考文献 1) O.C. Zienkiewicz & Y.K. Cheung ; The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw-Hill (1967)
2) S.J. Fenves & F.H. Branin ; A Network Topological Formulation of Structural Analysis, Proc. ASCE. ST. (1963)
3) 新開.佐武 ;節点の接続をトポロジー的に考慮した有限要素法, 土木学会講演概要 (1971)
4) I. Konishi, N. Shiraishi, S. Tamamura & T. Taniguchi ; A Network-topological Study on Statical Analysis of Rigid Framed Structure
Memoirs of the Faculty of Eng. Kyoto Univ. (1969)