積分方程式による板の解析

京都大学工学部　丹羽義次　小林昭一　○福井卓雄

はしがき　平板の曲げ理論における境界値問題を積分方程式に帰着させて解析する。積分方程式による解法は線形問題に対してはきわめて一般的な方法であり，すでに弾性学においてはいくつかの解析結果が発表されている。[1]　これらによると，積分方程式による解法の特徴として，(i)任意形状の境界を取り扱うことができる。(ii)動的問題をも取り扱うことができる。(iii)差分法，有限要素法などの他の数値解法と比較して，少数の未知数でより高い精度の解を得ることができる。などが挙げられている。　ここでは等方性板の曲げ理論における境界値問題を積分方程式に帰着させる方法について述べる。

平板曲げ理論の境界値問題[2]

(1)　場の方程式　$D\nabla^4 w = p$　境界内部において

(2)　境界条件
- (i)固定境界　$w = 0,\quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0$
- (ii)単純支持境界　$w = 0,\quad G = 0$　境界上において
- (iii)自由境界　$G = 0,\quad V = 0$

ここに，w；たわみ，p；板に垂直な単位面積当りの荷重，D；板の曲げ剛性

$\frac{\partial}{\partial n}$；境界上の外向き法線微分，$G$，$V$；法線方向の曲げモーメント，等価せん断力で，$\frac{\partial}{\partial s}$；線微分として

$$G = -D\left[(1-\eta)\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \eta\nabla^2 w\right],\qquad V = -D\left[\frac{\partial\nabla^2 w}{\partial n} + (1-\eta)\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial n\partial s}\right)\right],\quad \eta：\text{ポアソン比}.$$

相反公式　任意の4階微分まで連続な関数u，vに対して，領域Dとその境界∂Dにおいて，次の関係がある。

$$(3)\qquad \int_D \left(v D\nabla^4 u - u D\nabla^4 v\right) dS = \int_{\partial D}\left[-vV(u) + \frac{\partial v}{\partial n}G(u) - G(v)\frac{\partial u}{\partial n} + V(v)u\right] ds$$

基本特異解[2]　無限板において，点ξに作用する集中垂直荷重による点xにおけるたわみ$w_0(x;\xi)$を才一基本特異解とする。

$$(4)\quad \begin{cases} K_1(x;\xi) \equiv w_0(x;\xi) = \frac{1}{8\pi D} r^2 \log\frac{r}{a} \\ K_2(x;\xi) \equiv \frac{\partial w_0(x;\xi)}{\partial n_x} = \frac{1}{8\pi D}\lambda r\left(2\log\frac{r}{a} + 1\right) \\ K_3(x;\xi) \equiv G_x[w_0(x;\xi)] = -\frac{1}{8\pi}\left[2(1+\eta)\log\frac{r}{a} + 2(1-\eta)\lambda^2 + (1+3\eta)\right] \\ K_4(x;\xi) \equiv V_x[w_0(x;\xi)] = -\frac{1}{4\pi}\left\{\lambda\left[(3-\eta) - 2(1-\eta)\mu^2\right] + \kappa(1-\eta)(\mu^2 - \lambda^2)\right\} \end{cases}$$

同様に，点ξに作用する集中曲げモーメント荷重による点xにおけるたわみ$w_1(x;\xi)$を才二基本特異解とする。

$$(5)\quad \begin{cases} \tilde{K}_1(x;\xi) \equiv w_1(x;\xi) = \frac{1}{8\pi D}\tilde{\lambda} r\left(2\log\frac{r}{a} + 1\right) \\ \tilde{K}_2(x;\xi) \equiv \frac{\partial w_1(x;\xi)}{\partial n_x} = -\frac{1}{8\pi D}\left[\alpha\left(2\log\frac{r}{a} + 1\right) - 2\lambda\tilde{\lambda}\right] \\ \tilde{K}_3(x;\xi) \equiv G_x[w_1(x;\xi)] = \frac{1}{4\pi r}\left[2(1-\eta)\lambda(\alpha - \lambda\tilde{\lambda}) - (1+\eta)\tilde{\lambda}\right] \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
K_4(x;\xi) \equiv \nabla_x[\omega_1(x;\xi)] = -\dfrac{1}{4\pi r^2}\Big[(1-\eta)\{[\mu(\alpha-6\lambda\tilde{\lambda})-\lambda\mu(2\alpha+\beta)]-2\kappa r[\tilde{\lambda}(\lambda^2-\mu^2) \\
\qquad -(\alpha\lambda-\beta\mu)]+(3-\eta)(\alpha-2\lambda\tilde{\lambda})\Big]
\end{cases}
$$

ここに，$r=\sqrt{|x-\xi|^2}$，a；任意の定数，κ；考える点での曲率，$\mathbb{n}$；法線ベクター，$\mathbb{t}$；接線ベクター

$\alpha=\mathbb{n}_x\cdot\mathbb{n}_\xi$，$\beta=\mathbb{t}_x\cdot\mathbb{n}_\xi$，$\lambda=\mathbb{n}_x\cdot\nabla_x r$，$\tilde{\lambda}=\mathbb{n}_\xi\cdot\nabla_\xi r$，$\mu=\mathbb{t}_x\cdot\nabla_x r$，添字 x，ξ はそれぞれ点 x，ξ における値であることを示す。

__積分方程式の構成__　　相反公式(3)の u に第一基本特異解，v に領域 D で(1)を満足する関数 ω を代入すると，

(6)　$F\omega(\xi)=\int_D K_1(x;\xi)p(x)\,dS_x+\int_{\partial D}\Big\{K_1(x;\xi)\nabla_x[\omega(x)]-K_2(x;\xi)G_x[\omega(x)]+K_3(x;\xi)\dfrac{\partial\omega(x)}{\partial n_x}-K_4(x;\xi)\omega(x)\Big\}\,ds_x$

ここに，F は点 ξ が領域 D の内部，境界上，外部にあるとき，それぞれ 1，$\frac{1}{2}$，0 の値をとる。

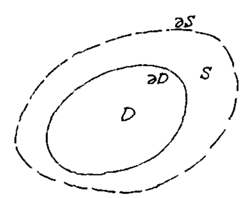
上の式において，x と ξ とを入れかえて，$K_1(\xi;x)=K_1(x;\xi)$，$K_2(\xi;x)=\tilde{K}_1(x;\xi)$ を考慮すれば

(7)　$F\omega(x)=\int_D K_1(x;\xi)p(\xi)\,dS_\xi+\int_{\partial D}\Big\{K_1(x;\xi)\nabla_\xi[\omega(\xi)]-\tilde{K}_1(x;\xi)G_\xi[\omega(\xi)]+K_3(\xi;x)\dfrac{\partial\omega(\xi)}{\partial n_\xi}-K_4(\xi;x)\omega(\xi)\Big\}\,ds_\xi$

この式は，境界上の密度 $\nabla_\xi[\omega(\xi)]$，$G_\xi[\omega(\xi)]$，$\frac{\partial\omega(\xi)}{\partial n_\xi}$，$\omega(\xi)$ によって，点 x におけるたわみ $\omega(x)$ を表わす。

いま，与えられた領域 D を含む仮想の領域 S を考え，その境界を ∂S とする(Fig. 1)。　このとき，∂S 上に分布する密度 $\varphi(\xi)=\nabla_\xi[\omega(\xi)]$，$\psi(\xi)=-G_\xi[\omega(\xi)]$ による領域 D 内部のたわみ $\omega(x)$ は場の方程式(1)を満足する。　従って，境界 ∂D 上で境界条件(2)を満足するような密度 $\varphi(\xi)$，$\psi(\xi)$ を決めてやれば，その密度による領域 D 内部のたわみ $\omega(x)$ は，与えられた境界値問題に対する解となる。　結局境界値問題(1)，(2)は，∂S 上の密度 $\varphi(\xi)$，$\psi(\xi)$ を求める積分方程式に帰着される。

$S \supset D$



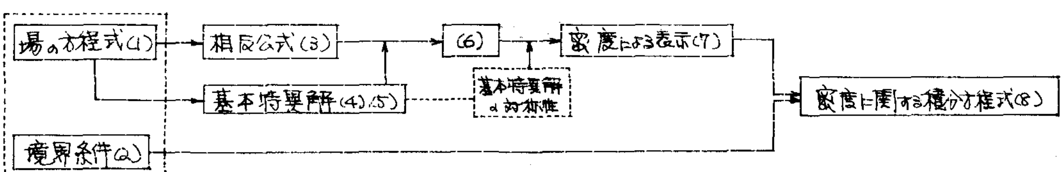
(Fig. 1)

(8)　$q_A(x)=\int_S K_A(x;\xi_1)p(\xi_1)\,dS_{\xi_1}+\int_{\partial S}\Big[K_A(x;\xi)\varphi(\xi)+\tilde{K}_A(x;\xi)\psi(\xi)\Big]\,ds_\xi$，　$(x\in\partial D,\ \xi_1\in D,\ \xi\in\partial S)$

ここに，A は境界条件(2)により，それぞれ (i) $A=1,2$，(ii) $A=1,3$，(iii) $A=3,4$ の値をとる。

また，境界値を(2)のように決めたときには，$q_A(x)=0$ である。

平板の曲げ理論における境界値問題を積分方程式に帰着させる手順の概略を図示しておく(Fig. 2)。この方法は線形問題に対しては一般的なものであり，今後広範囲の問題に応用されることが期待される。　なお，数値解析の結果は当日スライドで説明する。



(Fig. 2)

(参考文献)

(1)　丹羽義次，小林昭一，福井卓雄；積分方程式による任意形状，多数空洞周辺の応力解析，土木学会論文報告集，195，pp. 27-35 (1971)
弾性学における最近の研究については この論文の参考文献を参照されたい。

(2)　Timoshenko, S.P. and S.Woinowsky-Krieger ; Theory of Plates and Shells, 2nd. ed. McGraw-Hill (1959).