

京都大学工学部

主 員 丹羽義次

,

副 員 小林昭一

,

学生員 倉田豊次

1. 序 文

板の解析に関しては種々の方法が従来されている。大別すると、解析的アプローチと、最初から近似モデルを考慮した数値計算によるものに分類することが出来る。前者の例としては、フーリエ級数展開法が、代表的なものとしてあげることが出来るが、これには、ある限られた形状を持った板にしか適用出来ないという欠点がある。後者に関しては、差分法 (F.D.M.) や有限要素法 (F.E.M.) 等があり、任意形状の取り扱いが可能である。しかし、必要とする値は、境界内の数点で充分なことが少なくない。それ故に、F.D.M. や F.E.M. では、 unnecessary 計算を行なうことになりかねない。

ここで、我々が試みた方法は、以下に述べるように任意形状を扱うことが可能で、板全体でなく、板の境界上だけで未知数を考える解析的なアプローチであるので F.E.M. や F.D.M. に比べて、かなり少ない未知数でよく、それに合わせて方程式の解法も容易となり、かつ十分な精度の解が求められるという特徴がある。

2. 本 文

本研究は、板の基礎方程式

$$\nabla^2 w = \delta / D \quad (w: \text{撓み}, \delta: \text{分布荷重}, D: \text{板剛性})$$

の一般解を、ポテンシャルというものに置きかえて、それを各種の境界条件を満足する形に整えるというものである。そこで

$$w = W + w_1 \quad (W: \text{一般解} (\nabla^2 W = 0), w_1: \text{特解})$$

と考える。この W は重調和関数であるから、2つの調和関数 φ , ψ を用いて、

$$W = r^2 \varphi + \psi \quad (r^2 = x^2 + y^2, \nabla^2 \varphi = \nabla^2 \psi = 0)$$

と表わされる。ここで、 φ , ψ として対数ポテンシャルを考える。すなわち、

$$\varphi = \int_L \log |P - \delta| \cdot \sigma(s) ds, \quad \psi = \int_L \log |P - \delta| \cdot \mu(s) ds$$

ここで σ , μ は密度関数と呼ばれる境界 L で定義された関数、 P は任意点、 δ は境界上の点、 ds は境界上の微小要素を示す。それ故、この2つの密度関数 σ , μ が得られればポテンシャルが求まり、従って境界内の任意点の撓み、モーメントは求められる事になる。

以下具体的に順を追って解法を述べる。本研究では境界条件として、単純支持・完全固定の2つの組み合わせの場合、及び別個に与えられた場合を考えた。それ故、境界条件として与えられるのは、撓み・撓み角・モーメントである。図1のように座標をとれば、境界上における n 方向の曲げモーメント M_n は、

$$M_n = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \left(\nabla^2 w + \frac{1-\nu}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) \doteq -D \nabla^2 w \quad \left(\frac{1}{\rho} \doteq 0 \right)$$

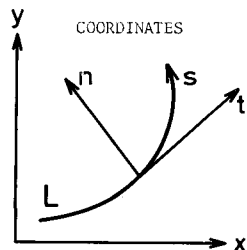


Fig. 1

で与えられる (ρ は境界の曲率半径を示す)。境界上のある点が単純支持点であれば、

$$w = M_n = 0 \quad \text{i. e.} \quad w = \nabla^2 w = 0$$

完全固定点であれば

$$w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0$$

という境界条件が得られる。そこで、2種類の支持条件に対して、各々次の2つの連立積分方程式が得られる。(P は境界上の点を示す。)

$$\begin{aligned} \text{単支} \quad & \begin{cases} (x^2 + y^2) \int_L \log |P - g| \cdot \sigma(g) ds + \int_L \log |P - g| \cdot \mu(g) ds = -W_1 \\ 4 \int_L \log |P - g| \cdot \sigma(g) ds + 4x \left\{ \int_L \log_x |P - g| \cdot \sigma(g) ds + \pi \sigma(P) \frac{\partial x}{\partial n} \right\} \\ + 4y \left\{ \int_L \log_y |P - g| \cdot \sigma(g) ds + \pi \sigma(P) \frac{\partial y}{\partial n} \right\} = -\nabla^2 W_1 \end{cases} \\ \text{完全} \quad & \begin{cases} (x^2 + y^2) \int_L \log |P - g| \cdot \sigma(g) ds + \int_L \log |P - g| \cdot \mu(g) ds = -W_1 \\ 2(x \cdot x_n + y \cdot y_n) \int_L \log |P - g| \cdot \sigma(g) ds + (x^2 + y^2) \left\{ \int_L \log_m |P - g| \cdot \sigma(g) ds + \pi \sigma(P) \right\} \\ + \int_L \log_m |P - g| \cdot \mu(g) ds + \pi \mu(P) = -W_{1n} \end{cases} \end{aligned}$$

ここで添字は σ の変数による偏微分を示す。持解 W_1 は、等分布荷重の場合には、

$$W_1 = \frac{q}{4\rho D} (x^2 + y^2)$$

原点に集中荷重が作用した場合には、

$$W_1 = \frac{P}{8\pi D} r^2 \log \left(\frac{r}{a} \right) \quad (a: \text{任意定数})$$

で与えられる。この連立積分方程式を解き、密度関数を求める欲であるが、矩形板などの隅角部は特異点となつてゐるので、直接扱うことは不可能である。そこで適当な半径を持った円で隅角部を置きかえて特異性を除去する必要がある。一方この方程式の解析解を求めることは実際には不可能であるので、数値計算に頼らざるを得ない。そこで、例は

$$x(t) - \int_a^b K(t, \xi) \cdot x(\xi) d\xi = f(t)$$

という、第2種フレドホルム型積分方程式を

$$x_i - \sum_j K_{ij} x_j = f_i$$

というように、連立一次方程式に置きかえて解くことにする。

3. 結果

計算の一例として、周囲を単純支持された、図2に示す矩形板に (A) 等分布荷重を作用させた時の中央点の撓み、モーメントと、(B) 中央に集中荷重 P を作用させた時の中央点の撓みを、Timoshenko が計算した値と比較し、更に数値計算を行なう際の境界の分割数により、どの程度精度が変わるかも並記した。この他の数種の計算例については、講演会当日に報告する予定である。

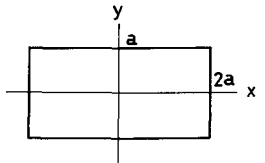


Fig.2 SIZE OF PLATE

		NUMBER OF SECTIONS			
		TIMOSHENKO	64	48	24
A	W max qa^4/D	0.162	0.163	0.163	0.166
	$M_x(x=y=0) \quad qa^2$	0.186	0.186	0.186	0.185
	$M_y(x=y=0) \quad qa^2$	0.407	0.407	0.409	0.414
B	W max Pa^2/D	0.0660	0.0659	0.0661	0.0668

Table 1. Comparison between Theoretical Solutions and Numerical Solutions

り、どの程度精度が変わるかも並記した。この他の数種の計算例については、講演会当日に報告する予定である。

4. 参考文献 M. A. Jaswon, M. Maiti, "An Integral Equation Formulation of Plate Bending Problems",

Journal of Engineering Mathematics, Vol. 2, pp.83-93, 1968.