施設建設のための数学モデルに関する一考察

京都大学工学部　正　員　吉川 和広
京都大学工学部　正　員　春名 攻
京都大学大学院　学生員 ○岡田 憲夫

1.)はじめに

近年，社会的・経済的な要請にもとづき，数多くの大規模な公共土木施設の建設が行なわれるようになってきている。このため施設建設の計画を策定する場合に広域的な社会的経済的な効用を考慮しなければならないようになってきた．現実の多くの場合，計画の策定に際しては，いくつかの地域にまたがった地方公共団体間において公共の目的にとって斉合性のとれた意見の調整と妥当な投資額の分担に関するとりきめを行なうことが必要となる。またこれらの計画がより上位に位置する国のレベルでの広域的な開発計画の目的に合致したものでなければならない．このような複雑な計画の作成に対処する手段の一環として，数学モデルを用いて計画モデルを定式化し，これらに対する数学的解釈を行ないながら解を得ることは，計画作成に要求される客観的な情報の提供を行ないうるという点で重要であろう。さらに一度数学的に定式化されれば，いちじるしく発達した電子計算機の助けをかりて，膨大な入力データおよび複雑な計算プロセスも処理することができる．

本稿では，上述した問題の典型的な例題ともみなしうる多目的ダムの建設における配置計画問題に焦点をしぼり，政策レベルをも考慮した議論ができるような数学モデルを提案し，その解を得る方針についての考察を試みることにする．ただし，ここでは入力データその他の問題は考察の対象から除外し，将来本モデルを実証的に検討した後，あらためて議論することにする。

2)モデルの一般的な定式化

ここでは貯水池および各需要地とを結ぶ輸送網の建設という２つの計画を考え，その総費用が最小になるような計画が全体として最適であるという観点に立っている。貯水池と輸送網の建設とを担当する行政主体は，どちらも同一の場合もあるが，それぞれ別の行政主体が担当することも多い。とりわけ将来このような貯水池の建設の対象はますます広域化すると考えられる。たとえば，貯水池の建設が国の手でなされるのに対し，輸送網の建設は地方公共団体あるいは各種水利組合などにより担当される場合がありうる。とくに輸送網の建設は，その地域の諸事情を反映して複数の公共体により行なわれることが多い。なお貯水池と輸送網の建設が実際には国の手で行なわれても，貯水池と輸送網の建設の費用分担に関係する行政主体が異なる場合も，貯水池と輸送網の建設との担当行政主体は別々であると考えることにする。

また目的関数の評価タームとして建設費用をとったが，これを便益効率におきかえることも理論的には可能である．しかしその計測化の方法に困難がつきまとう。これについては後述する。

(1)モデルの設定

モデルを以下のように設定する。

$$L = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} R_i y_i \rightarrow \text{minimize} \qquad (1\text{-}1)$$

$$[\mathrm{I}] \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = D_j \qquad j = 1, 2, \cdots, n \qquad (1\text{-}2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq A_i y_i \qquad i=1,2,\cdots,m \tag{1-3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \leq K \tag{1-4}$$

$$y_i = \delta_i \begin{cases} =1 & \text{候補地}i\text{に貯水池を建設する} \\ =0 & 〃\quad\text{建設しない} \end{cases} \tag{1-5}$$

$$x_{ij} \geq 0 \tag{1-6}$$

ただし

D_j：需要地jの需要量

R_i：貯水池建設候補地iの建設費

A_i：　〃　の建設容量

C_{ij}：候補地iから需要地jへの輸送網の建設単価

x_{ij}：候補地iから需要地jへの配水量

K：建設する個数

上に定式化された問題は，いわゆる混合整数計画問題の範ちゅうに属する。しかしこのままで解くのは得策ではないし，さらにこのモデルのもつ物理的意味を明瞭にするために以下に述べるように問題の近似として若干の修正を加える。

(2)モデルの修正(その1)

(I)において設定した条件(1-4)と(1-5)を緩める。(1-4)は建設すべき貯水池の個数を限っているが，これは必ずしも必要ではない。さらに$0 \leq y_i \leq 1$になるようにy_iのとるべき範囲を広げれば，y_iは貯水池の規模に関するパラメータとみなしうる。このようにしたとき，特定のy_iが0に近ければ，その貯水池の建設は考えない方がよいことが示唆される。なおこのような仮定は，R_iとA_iとの間に線形性が保証されているときに妥当である。これについてはさらに考察が必要である。またこの条件をもう少し厳密にするならば，

$$0 \leq y_i \leq \varepsilon \quad \text{または} \quad 1-\varepsilon \leq y_i \leq 1 \tag{2-4$'$}$$

とすればよい。εは正の適当な値で，この範囲では先の線形性が近似的に成立するものとする。このような修正をほどこすと，(I)の問題は(II)のように変形される。

$$L = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} R_i y_i \tag{2-1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = D_j \tag{2-2}$$

$$[\text{II}] \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq A_i y_i \tag{2-3}$$

$$0 \leq y_i \leq 1 \tag{2-4}$$

$$x_{ij} \geq 0 \tag{2-5}$$

ところがこのとき

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \frac{R_i}{A_i}(A_i y_i) \quad \Leftarrow (2\text{-}3)\text{を代入} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \frac{R_i}{A_i} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \left(C_{ij} + \frac{R_i}{A_i}\right) x_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \left(C_{ij} + C_i^*\right) x_{ij} \end{aligned} \tag{2-6}$$

ただし

$$C_i^* = \frac{R_i}{A_i} \tag{2-7}$$

これは一般の輸送問題になる。

(3)モデルの修正(その2)

先には貯水池の建設と各需要地とを結ぶ輸送網の建設の2つの問題を考え，その総和を最小にすることを目的にしたが，いまここではこの総和のとり方を検討してみる。まずC_{ij}が費用を表わす場合を考える。いまかりにこのどちらかの側の担当当局に補助金などの財政援助的な政策が，より上位の当局により行なわれるとする。また貯水池の建設の際，土地の買収の問題などで費用が初めの算定見積を大幅に上まわる可能性がある場合が考えられる。また費用だけで算定する場合，便益や効率などを考慮に入れられないために，一方の側の計画が過大に評価されることになることがある。逆にC_{ij}のかわりに便益がとられたならば，問題は目的関数を最大化することになる。このような場合でも政策的にどちらかの便益をとりわけ高く評価したいことがおこりうる。このような場合に，単にこの2つの

計画の評価値の総和をとるのではなくて，各計画に重みを付加し，それをパラメータとした一次結合の形を目的関数に選ぶことが考えられる，いまこの重みをそれぞれw_1, w_2とすると，目的関数は次のように表わされる。

$$L = w_1 \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} + w_2 \sum_{j=1}^{m} \frac{R_i}{A_i}(A_i y_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (w_1 C_{ij} + w_2 C_i^*)x_{ij}$$

$$= w_1 \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \left(C_{ij} + \frac{w_2}{w_1} C_i^*\right)x_{ij}$$

いま$w_1 = 1$とおき$\frac{w_2}{w_1} = \lambda$が変化するものと考えれば

$$L = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (C_{ij} + \lambda C_i^*)x_{ij}$$

さらに$\frac{C_i^*}{n} = C_{ij}^*$とおけば，

$$L = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (C_{ij} + \lambda C_{ij}^*)x_{ij} \qquad (3\text{-}1)$$

[III] ただし

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = D_j \qquad (3\text{-}2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = A_i \qquad (3\text{-}3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (3\text{-}4)$$

この重みを色々変化させて，種々の代替案を列挙したい場合には，

$$\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2 \qquad (3\text{-}5)$$

このようにしたとき，[III]の問題はパラメトリック・プログラミングの範ちゅうに入る。パラメトリック・プログラミングの問題は双対問題を対応させることにより，λが変化しても機械的に新しいλに対する解を得ることができる。

なおここでの問題はλの決め方である．現在のところこの値を具体的に求める方法はない，このλの値についてはさらに検討が必要である。以下では少し別の観点から本問題を考察することによりλの意味を明らかにすることにする。

(4)モデルの修正（その4）

さて始めに定式化した問題を全く別の観点から考察してみる。

[IV]

$$\begin{cases} -L + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} R_i y_i = 0 & (4\text{-}1) \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - A_i y_i = 0 & (4\text{-}2) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = D_j & (4\text{-}3) \\ y_i \leq 1 & (4\text{-}4) \end{cases}$$

$$x_{ij},\ y_i \geq 0 \qquad (4\text{-}5)$$

ここで$-L = x_0$とおき[IV]を行列で表現すると，

[IV]

$$\begin{cases} P_0 x_0 + P_1 X + P_2 Y = q & \text{：主問題} \quad (4\text{-}6) \\ P_1 X = q_1 & \text{：従問題} \quad (4\text{-}7) \\ P_2 Y = q_2 & \text{：従問題} \quad (4\text{-}8) \end{cases}$$

$$X \geq 0,\ Y \geq 0 \qquad (4\text{-}9)$$

これはいわゆるdecompositionの問題の定式化となっている。2つの異なった行政主体が各自その利害だけを考慮して得た最適政策は，必ずしもこれらを包括する上位の政策と一致しない場合がある。このときこれらの主体は相互に情報を交換しあいながら総合的な意味で最適政策に近づくように政策を修正していかなければならない。この過程をうまく数学的に記述するのが，decompositionの問題である。すなわちXに対応する行政主体である配水網建設担当当局とYに対応する主体である貯水池建設担当当局とが，それぞれ独自にその内部で条件(4-7),(4-8)を満たし，かつこの両者の間で条件(4-6)を満たすように調整をはからなければならない。つまり各行政主体の立場での計画は，さらに上位の行政主体の総合的な政策に支配されるのである。

さて以下では，上に示したdecompositionの定式化とその解法を検討しつつ，このような行政主体の行動様式が数学的にいかに記述されるかという問題を考察する。

(5) decompositionの原理と行政主体の行動様式との関連

[IV]で定式化されたdecompositionの問題は次の2つの段階に分割される。

従問題 $\begin{cases} P_1X=g_1 \\ X\geq 0 \end{cases}$:[$\mathcal{L}_1$]　$\begin{cases} P_2Y=g_2 \\ Y\geq 0 \end{cases}$:[$\mathcal{L}_2$]　(5-1)

主問題 $P_0X_0+\overline{P_1}X+\overline{P_2}Y=g$　:[$\mathcal{L}_0$]　(5-2)

すなわち[$\mathcal{L}_1$],[$\mathcal{L}_2$]は各行政主体の立場での計画の策定の定式化である。[$\mathcal{L}_1$][$\mathcal{L}_2$]とこれに付加される目的関数を満たす最適解を含む実行可能解を選び出すことにより[$\mathcal{L}_0$]の問題で扱かわれる代替案を提出する。しかし[$\mathcal{L}_1$],[$\mathcal{L}_2$]の実行可能解を全て選び出さずとも，その解の集合が凸の有界閉集合と仮定すれば，任意の実行可能解はその内の端点だけで表わされる。すなわちその解をX,Yとすれば，

$$\begin{cases} X=\sum_{i=1}^{L}\lambda_iX_i & (\text{但し}\sum_{i=1}^{L}\lambda_i=1) \\ Y=\sum_{j=1}^{M}\mu_jY_j & (\text{但し}\sum_{j=1}^{N}\mu_j=1) \end{cases} \quad (5\text{-}3)$$

最適解はもちろんこの端点の内の1つである。

(5-3)を(5-2)に代入して

$$[\mathcal{L}_3]\begin{cases} x_0+\overline{P_1}\sum_{i=1}^{L}\lambda_iX_i+\overline{P_2}\sum_{j=1}^{M}\mu_jY_j=g & (5\text{-}4) \\ \sum_{i=1}^{L}\lambda_i=1 & (5\text{-}5) \\ \sum_{j=1}^{M}\mu_j=1 & (5\text{-}6) \end{cases}$$

を得る。

従って[$\mathcal{L}_1$],[$\mathcal{L}_2$]により得られた実行可能解を使って[$\mathcal{L}_3$]の問題を解けばよい。しかも必要な実行可能解は端点のみでよいことになる。これらの端点が定まっていれば，[$\mathcal{L}_3$]の問題は最適なλ_i $(i=1,\cdots,L)$，μ_j $(j=1,\cdots,M)$を求める問題になる。すなわちこのλ_i,μ_jこそが[$\mathcal{L}_1$],[$\mathcal{L}_2$]の最適解に重みづけを与えてくれる。[$\mathcal{L}_1$],[$\mathcal{L}_2$]で得られた最適政策の間を如何に調整するかという問題は，とりもなおさずこの最適なλ_i,μ_jを求めることに相等するのである。

ところが全ての端点を選び出すかわりに次の問題を解くだけで十分なことが数学的に証明できる。

$$[\mathcal{L}_1]':\begin{cases} P_1X=g_1 \\ \gamma_1^0X=z_1\rightarrow Min \\ X\geq 0 \end{cases} \quad [\mathcal{L}_2]':\begin{cases} P_2Y=g_2 \\ \gamma_2^0Y=z_2 \\ Y\geq 0 \end{cases} \quad (5\text{-}7)$$

ここに $\begin{cases} \gamma_1^0=\pi^0\overline{P_1} \\ \gamma_2^0=\pi^0\overline{P_2} \end{cases}$　(5-8)

またπ^0は[$\mathcal{L}_3$]の基底行列に対するシンプレックス剰数である。

故に[$\mathcal{L}_1$],[$\mathcal{L}_2$]の端点を選び出して[$\mathcal{L}_3$]の問題を解くという手順をとらずとも，(5-8)の条件を考慮しつつ，λ,μに関する最適基底行列を求める手順で，最適なX_i^0,Y_i^0を得ることができる。同時にこれに対応して最適なλ_i,μ_jの組が得られるから，それをλ_i^0,μ_j^0と表わせば，最適解X^0,Y^0は

$$\begin{cases} X^0=\sum_{i=1}^{L}\lambda_i^0X_i & (5\text{-}9) \\ Y^0=\sum_{j=1}^{M}\mu_j^0Y_i & (5\text{-}10) \end{cases}$$

より求められる。

このようにdecompositionの原理は，各行政体の立場での最適政策からその実行可能な範囲内でどの程度妥協しなければいけないかを数学的に明瞭に表現する。また各行政体が妥協できる限界がさらに政治的経済的理由で設定されるならば，あらかじめλ,μのとる値に範囲を設けることにより解決できるのである。

3)おわりに

本稿では，貯水池および輸送網の建設という2つの計画とこれを総合した上位計画とを考え，前者の計画の間にどのような関係が存在したときに後者の計画が最適になるかというかなり行政レベルの問題をも含んだ計画を数学的に定式化し説明しようとした。しかしこのような議論は反面あまりにも概念的で実際に用いにくい。今後実証的考察を繰り返すことにより，モデルの精度の改善をはかり実際の適用に耐えるものにしていきたい。講演時にはその一例を示すことにする。