IV-30 日程短縮法に関する確率論的考察

大阪市立大学　正員　三瀬　貞
大阪市立大学　正員　西村　昂
大阪市港湾局　正員○高原疆次

1. まえがき

プロジェクトの日程短縮の手法として従来用いられているCPMでは、プロジェクト中のアクティビティに対するある費用水準に対してただ１つの所要時間が決まるものとして、その状態において一意的に定まってくるクリティカルパスを短縮するという、いわば決定論的方法が用いられている。ところが、一般にプロジェクトに含まれるアクティビティの所要時間は、ある費用水準に対して一定の確率分布を持った確率事象であると考えた方が適切な場合が多い。本研究では、任意のアクティビティに対してその費用水準に対する所要時間の確率分布が何らかの方法で推定できる場合の日程短縮法について考察したものである。

2. 従来のCPMに関する考察

従来のCPMでは、プロジェクトPに含まれるアクティビティa_{ij}に対してその所要時間t_{ij}，所要費用r_{ij}を次のように考えている。

$$\left.\begin{array}{lll} \text{標準状態} & t_{ij}=D_{ij}\ , & r_{ij}=M_{ij} \\ \text{過渡状態} & d_{ij}<t_{ij}<D_{ij}\ , & M_{ij}<r_{ij}<m_{ij} \\ \text{特急状態} & t_{ij}=d_{ij}\ , & r_{ij}=m_{ij} \end{array}\right\} \quad (1)$$

そして、ある費用水準r_{ij}に対してその所要時間t_{ij}も一意的に決まるものと考え、一点見積りのPERT的に求めたクリティカルパスを短縮していくため、費用水準r_{ij}に対して所要時間t_{ij}の分布が分る場合は、CPM手法で日程短縮すると不適切な場合がある。例として、図-1のようなネットワークを考えるとCPMでは、まずa_{14}の短縮を図ることになるが、今各々のアクティビティの標準状態におけるt_{ij}がD_{ij}を平均値とし、変域を$0\leq t_{ij}\leq 2D_{ij}$とする矩形分布を持つとしてみるとクリティカルパスは①→④ではなくなる。すなわち各アクティビティの所要時間の分布のしかたによっては、まずa_{14}を短縮することが必ずしも適切ではないことが分る。

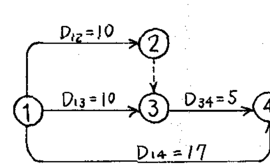

図-1

3. 確率論的日程短縮の基本的考え方

今、ネットワークPに含まれる各々のアクティビティa_{ij}について、その所要時間t_{ij}の分布，f_{ij}が費用水準r_{ij}について、次のように分っているものとする。

$$
\left.\begin{array}{lll}
\text{標準状態} & f_{ij} = f_{ij(M_{ij})}(t_{ij}) & \\
\text{過渡状態} & f_{ij} = f_{ij(r_{ij})}(t_{ij}) & M_{ij} < r_{ij} < m_{ij} \quad (i,j) \in P \\
\text{特急状態} & f_{ij} = f_{ij(m_{ij})}(t_{ij}) &
\end{array}\right\} \quad (2)
$$

プロジェクトPの完成時間Tもまたある確率分布を持っており、コンボリューション操作によって理論的には求めることが可能である。今、すべてのアクティビティが標準状態にある場合のTの期待値をλとする。この標準状態から出発して次のような手順で日程を短縮する。

① まず任意のアクティビティ a_{ij} の費用水準を Δr_{ij} 上げて，$r_{ij} = M_{ij} + \Delta r_{ij}$ とし その所要時間分布を $f_{ij(M_{ij})}(t_{ij})$ から $f_{ij(r_{ij})}(t_{ij})$ に短縮する。

② その状態でのPの完成時間Tの期待値 $\lambda_{(ij)}$ を求める。 $\Delta\lambda_{(ij)} = \lambda - \lambda_{(ij)}$

③ 判定規準として $Q_{(ij)} = \Delta\lambda_{(ij)} / \Delta r_{ij}$ を導入する。

④ 上記①～③をすべてのアクティビティについて検討し、Qの maximum なアクティビティ a_{ij} を短縮して次のネットワーク状態に移行する。

この時のプロジェクト短縮時間 $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_{(ij)}$

この時のプロジェクト増加費用 $\Delta C = \Delta r_{ij}$

上記①～④の操作をすべての作業が特急状態になるまで繰返して行なえば、プロジェクトの費用－時間曲線が得られる。

4. アクティビティの所要時間分布推定モデル

アクティビティの標準状態から特急状態までのすべての費用水準に対して、その所要時間の分布を調べることは実際問題として不可能であるので、過渡状態における所要時間分布形は，標準状態と特急状態から次のように推定する。仮定として次の3つを設ける。

① アクティビティの所要時間の分布形は標準状態から特急状態まであらゆる費用水準に対してβ分布をするものとする。

② 標準状態及び特急状態における分布関数が分っているものとする。

③ 過渡状態における分布形は標準状態と特急状態からリニアーに推定できる。

$$
\left.\begin{array}{ll}
\text{標準状態} & f_{ij} = f_{ij(M_{ij})}(t_{ij}) = \dfrac{1}{(B-A)^{L+K+1}\beta(L+1,K+1)}(t_{ij}-A)^{L}(B-t_{ij})^{K}, \ A<t_{ij}<B \\
\text{過渡状態} & f_{ij} = f_{ij(r_{ij})}(t_{ij}) = \dfrac{1}{(b'-a')^{l'+k'+1}\beta(l'+1,k'+1)}(t_{ij}-a')^{l'}(b'-t_{ij})^{k'}, \ a'<t_{ij}<b' \\
\text{特急状態} & f_{ij} = f_{ij(m_{ij})}(t_{ij}) = \dfrac{1}{(b-a)^{l+k+1}\beta(l+1,k+1)}(t_{ij}-a)^{l}(b-t_{ij})^{k}, \ a<t_{ij}<b
\end{array}\right\} (3)
$$

但し

$$
a' = A-(A-a)\frac{r_{ij}-M_{ij}}{m_{ij}-M_{ij}} \qquad b' = B-(B-b)\frac{r_{ij}-M_{ij}}{m_{ij}-M_{ij}}
$$

$$
l' = L-(L-l)\frac{r_{ij}-M_{ij}}{m_{ij}-M_{ij}} \qquad k' = K-(K-k)\frac{r_{ij}-M_{ij}}{m_{ij}-M_{ij}}
$$

5. 簡単な計算例

図-1のネットワークを例にとって計算してみる。最終結合点④の分布関数は理論的には次のように求められる。

結合点 i の密度関数を $F_i(t)$　　結合点 i からみた結合点 j の密度関数を $F_{ij}(t)$

結合点 i の累積密度関数を $G_i(t)$　　結合点 i からみた結合点 j の累積密度関数を $G_{ij}(t)$

と表現すると、

$$
\left.
\begin{aligned}
&G_3(t)=\int_0^t f_{12}(t_{12})dt_{12}\cdot\int_0^t f_{13}(t_{13})dt_{13} && F_3(t)=G_3'(t)\\
&F_{34}(t)=\int_0^t f_{34}(t_{34})F_3(t-t_{34})dt_{34} && \\
&G_4(T)=\int_0^T f_{14}(t_{14})dt_{14}\cdot\int_0^T F_{34}(t)dt && F_4(T)=G_4'(T)
\end{aligned}
\right\}\quad (4)
$$

簡単のため各アクテイビテイの所要時間分布は標準状態から特急状態まで矩形分布（β分布で母数がすべて0の場合）をするものとし、所要データーを表1に示す。

計算結果を表-1及び図-2に示しておく。

アクテイビテイ	標準状態			特急状態			Δr_{ij}
(i, j)	A	B	M_{ij}	a	b	m_{ij}	
(1, 2)	0	20	6	0	16	10	2
(1, 3)	0	20	5	0	16	11	3
(3, 4)	0	10	2	0	8	3	1
(1, 4)	0	34	7	0	28	19	4

表-1　所要データー

ステップ	λ	短縮アクテイビテイ	$\Delta\lambda$	増加費用 ΔC
標準	22.39	(3, 4)	0.57	1
1	21.82	(1, 4)	0.70	4
2	21.12	(1, 2)	0.36	2
3	20.76	(1, 4)	0.68	4
4	20.08	(1, 4)	0.64	4
5	19.44	(1, 2)	0.34	2
6	19.10	(1, 3)	0.49	3
7	18.61	(1, 3)	0.42	3
特急	18.19			

表-2　計算結果

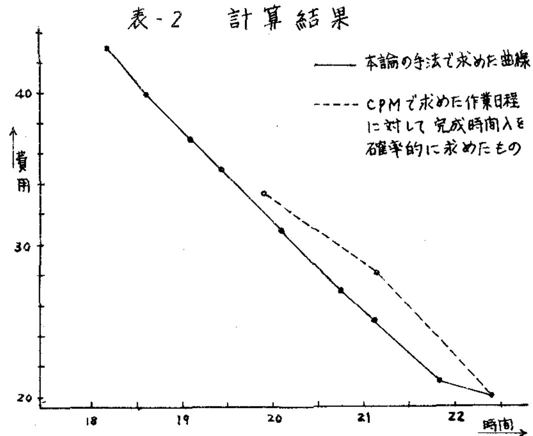

図-2　費用-時間曲線

6　結語

図-2にも示されているようにアクテイビテイの所要時間に確率的なデーターが与えられている場合は決定論的なCPMを用いた結果よりも、本論の手法がかなり適切な情報を与えていることが分る。

しかし、ネットワークが大きくなると計算結果がぼう大になり過ぎるという問題があり、この点を今後の課題として研究していきたい。