時間オキュパンシーの特性について

京都大学　正　員　奥谷　巌
〃　　学生員　井上矩之
〃　　学生員　○中浜昭人

1. まえがき

交通制御を行なうにあたっては、時々刻々の交通情報の入手が基本的に必要である。時間オキュパンシーは、道路上の混雑の程度をかなり忠実に表わすものと考えられ、特に高速道路における交通制御を行なう際に有用な情報と考えられている。本研究では、時間オキュパンシーの分散に着目し、時間オキュパンシーの特性について考察し、さらに統計実験により得られた実験値と理論値とを比較検討してみた。

2. 時間オキュパンシーの分散

時間オキュパンシーは、ある地点においてその点を通過する車の車体によって占有された時間(以下"占有時間"とよぶ)の観測時間(車体により占有された時間＋車間により占有された時間)に対する割合であると定義できる。すなわち、時間オキュパンシー O_t は

$$O_t = \sum_{i=1}^{n}(l_i/v_i) \Big/ T \qquad \text{------} \quad (1)$$

ここに l_i は第 i 番目の車の車長、v_i は第 i 番目の車の速度、T は観測時間、n は T 内に観測地点を通過する車の台数である。

ここで $x = l/v$ なる量の確率分布を考えてみると、l と v の分布を直観的に考慮すれば、厳密には問題があるにしても、ほぼガンマー分布(フェーズのとり方によって指数分布にも一定分布にも、その中間の正規分布的分布にもあてはめられる分布)で近似できるものと思われる。よって、いまその確率密度関数を

$$f_m(x) = \mu^m x^{m-1} e^{-\mu x} \Big/ (m-1)! \qquad \text{------} \quad (2)$$

$$\text{ここに}\quad \frac{m}{\mu} = \overline{\left(\frac{l}{v}\right)} \qquad \text{よって}\quad \mu = m \Big/ \overline{\left(\frac{l}{v}\right)} \qquad \text{------} \quad (3)$$

式(2)で表わされる密度関数のモーメント生成関数(moment generating function)をいま $M(z)$ とすると

$$\begin{aligned} M(z) &= E\left[e^{zx}\right] = \int_0^\infty f_m(x)\, e^{zx}\, dx \\ &= \int_0^\infty \frac{\mu^m x^{m-1} e^{-\mu x}}{(m-1)!} \cdot e^{zx}\, dx = \left(\frac{\mu}{\mu - z}\right)^m \end{aligned} \qquad \text{------} \quad (4)$$

となる。

ところで、式(1)の分子の値は x の n 個の和であるから、その確率分布は x の n 重コンボリューションで表わされ、したがって、そのモーメント生成関数は $f_m(x)$ の生成関数 $M(z)$ の n 乗に等しくなる。よって、いまそれを $M_n(z)$ と表わすと次のようになる。

$$M_n(z) = \left\{M(z)\right\}^n = \left(\frac{\mu}{\mu - z}\right)^{mn} \qquad \text{------} \quad (5)$$

これを利用すると $\sum_{i=1}^{n}(l_i/v_i)$ の分散 $\hat{\sigma}^2$ は

$$\hat{\sigma}^2 = \left\{M_n''(z)\big|_{z=0}\right\} - \left\{M_n'(z)\big|_{z=0}\right\}^2 = \frac{n}{m}\cdot\overline{\left(\frac{l}{v}\right)}^2 \qquad \text{------} \quad (6)$$

となる。よって、求める時間オキュパンシーの分散 σ^2 は次のようになる。

$$\sigma^2 = \hat{\sigma}^2 / T^2 = \frac{n}{T^2 m}\overline{\left(\frac{l}{v}\right)}^2 = \frac{q}{Tm}\overline{\left(\frac{l}{v}\right)}^2 \doteqdot \frac{q\bar{l}^2}{Tm\bar{v}^2} \quad [\text{ただし } q:\text{交通量}] \cdots\cdots (7)$$

3. 統計実験による情報の入手

統計実験による時間オキュパンシーの統計は、次のような手順に従って行なった。

(i) 車長および車速を正規分布形と仮定し、正規乱数を発生させ、車頭時隔を指数分布と仮定し、指数乱数を発生させ、観測地点について、車頭通過時刻、車尾通過時刻、占有時間などの、交通流の時系列を作成する。

(ii) 占有時間について統計（度数分布、平均値、分散、変動係数などを求める）を行なう。

(iii) 時系列を観測単位時間長T分ごとに区切り、T分間観測値を求め、再度(ii)と同様の統計を行なう。

(iv) 平均交通量を変えて(i)～(iii)をくり返す。

なお、乱数発生は京都大学大型計算機のライブラリープログラムを利用した。

4. 結論

理論値および実験値を検討した結果、次のようなことが結論づけられた。

1° 式(7)からわかるように交通量が与えられた時、σ^2とTとは逆比例の関係にある。実験によると、1つのqに対し双曲線型のσ^2－T曲線が得られるが、いずれのqに対してもTが3分以下ではσ^2は非常に大きくなり、一方Tが15分以上ではσ^2がほとんど一定の値をとり安定している。交通制御を実施するにあたっては、迅速で適切な制御が必要であるが、これには交通流の変化を敏感にとらえ、かつバラツキの少ない安定した情報の入手が必要である。この点を加味すれば観測単位時間として上記の2傾向の交点である5～10分を採用すれば一応妥当であると思われる。

2° σ^2～qの関係は、q－vがなんらかの関数関係があるため、まずq～v曲線の仮定が必要である。すなわち、vをqの関数で表わしそれを式(7)に代入してやればσ^2とqとの関係が明らかになる。たとえば、q～v曲線を双曲線 $q = -kv(v - v_f)$ [v_f:自由走行速度] で与えると $v = \left(v_f \pm \sqrt{v_f^2 - \frac{4q}{k}}\right)/2$ [ただし符号の正は平常時、負は渋滞時の時にとる] を式(7)に代入すればよいわけである。ガンマー分布のフェーズを決めるmは、観測を行なうことにより決定すればよい。

しかし、ここで車長lがあまり変化しないことを考慮すれば、mは車速vの変化に伴い変化すると考えられ、vの関数、したがってqの関数であると考えられる。いまmを

$$m = \frac{1}{\bar{v}^2}\cdot\frac{\alpha}{h(q)} \qquad [\text{ただし } h(q):q\text{の多項式} \quad \alpha:\text{定数}] \cdots\cdots (8)$$

とおけば、交通量qが0に近づいた時（平常状態および渋滞状態の2つの近づき方がある）σ^2も0に近づき、これは観測値とよく合う。式(8)の$h(q)$およびαは、観測により決定することが必要である。

5. あとがき

式(7)からは、上記の結論のほかに、ある交通量の時、ある観測時間の時の分散σ_s^2を分散の標準値として与えておけば、交通量が変化した時に、標準値と同程度のバラツキの情報を得るための観測単位時間の決定にも論の展開が可能である。