Integer Programming によるネットワークのカット集合の求め方とその応用について

京都大学工学部　正員　春名 攻

1.はじめに　本稿においては、ネットワーク・モデルを用いたプロジェクト・プランニングや交通量配分において問題となるカットに着目し、従来の研究においてすでに解明されているネットワークのトポロジカルな諸性質に基づきその求め方について考察を加えるとともに、とくに応用という観点からプロジェクト・プランニングへの応用を一例としてとりあげてみた。以下にその概略を示す。

2.カットベクトル　いま、n個の有向アークと、m個の結合点をもつネットワークの構造を次式に示すような Incidence Matrix U を用いて表わす。

(1)　$U=(u_k^i),\ (k=1,2,\cdots,n,\ \ i=1,2,\cdots,m)$

$$u_k^i=\begin{cases}-1, & \text{結合点 } i \text{ がアーク } k \text{ の始点}\\ 1, & \text{結合点 } i \text{ がアーク } k \text{ の終点}\\ 0, & \text{その他の場合.}\end{cases}$$

つぎに、ループを表現するループ・ベクトルを Y であらわす。

(2)　$Y'=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$

ここで、y_kはアークkがループに含まれかつループに順方向である場合には1，逆方向の場合には-1，その他の場合には0の値を持つ。このループ・ベクトルYと Incidence Matrix U の間には次式のような関係が成立する。

(3)　$\sum_{k=1}^{n} u_k^i y_k=0,\ i=1,2,\cdots,m$

さらに、カットを次式で示すようなカット・ベクトルXによって表わす．すなわち、カットによって分割される結合点の2つの集合を、Nおよび$\overline{N}$とすると、Xは、

(4)　$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$$x_k=\begin{cases}1, & \text{アーク } k \text{ の始点が } N \text{ に含まれ、終点が } \overline{N} \text{ に含まれるとき}\\ -1, & \text{アーク } k \text{ の始点が } \overline{N} \text{ に含まれ、終点が } N \text{ に含まれるとき}\\ 0, & \text{その他の場合.}\end{cases}$$

カット・ベクトルとループ・ベクトルとの間には次式に示すような関係が成立することが求められている。

(5)　$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k=0$

さて、式(3)から明らかなように、ループ・ベクトルの要素y_kは、Incidence Matrix のランクrに従って定まってくる$n-r$個の従属変数によって表わされる。

(6)　$y_k=\sum_{t=1}^{n-r}\alpha_{kt}\,y_t$

つぎに、式(6)によって示されたy_kを式(5)に代入すると、

(7)　$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k=\sum_{t=1}^{n-r} y_t\left(\sum_{k=1}^{n}\beta_{kt}\,x_k\right)=0$

のようにあらわされる。ここで、上式はy_tの値のいかんにかかわらず成立するから、

(8)　$\sum_{k=1}^{n}\beta_{kt}\,x_k=0,\ t=1,2,\cdots,n-r$

が成立する。上式を満たす解Xがネットワークにおけるカットを構成することが明らかである。式(8)がカットの代数的な記述である。

さて、カットが現実の問題となる場合には、カットによって分割される結合点のいくつかに特別な条件が付加されていることが多い。たとえば、ネットワークの始点Nに、終点は$\overline{N}$に含まれるようなカットを求める場合や、ある特定の結合点をNの部分集合として必らず含むようなカットだけを求めたい場合などである。この問題に対しては、次式によって定められるZを用いることによって解決することができる。

(9)　$Z=(z_1,z_2,\cdots,z_m)$

(10)　$z_i=\begin{cases}1, & i\in N \text{ のとき}\\ 0, & i\in \overline{N} \text{ のとき}\end{cases}$

ZとカットXとの間には次の関係が成立する。

(11)　$x_k=\sum_{i=1}^{m} z_i u_k^i,\ k=1,2,\cdots,n$

上記の関係に基づけば、制約条件の付された結

合点 $l \in L$ に対する条件の記述は、次式のような x_k に関する方程式として書き表わせる。

(12) $\sum_{k=1}^{n} x_k \bar{u}_k^l = z_l \ , \quad l \in L$

ここで、$\bar{u}_k^l$ は Incidence Matrix の逆行列 $\bar{U}^{-1}$ の要素をあらわしており、z_l には定数として1あるいは0の値が与えられている。

3.プロジェクト・プランニングへの応用例　以上で、カットに関する代数的な記述を示したが、ここでは、これらをネットワーク・プランニングの問題へ応用する場合について考察する。

(1) CPMにおけるミニマム・カット.　CPMの主たる課題は、プロジェクト・ネットワークによって表現された工程計画のスケジュールを計算しクリティカルパスを求めることと、各計算ステップにおいて、クリティカル・パスから構成されるサブネットワークにおいてミニマム・カットを求め、そこに含まれる作業(アーク)の所要時間を短縮($x_k=1$)、あるいは伸ばし($x_k=-1$)最適スケジュールを求めることにある。一般に、CPM計算の労力は、その大部分がミニマム・カットを求めることに払われるが、多くの場合、クリティカル・パスからサブネットワークは比較的簡単な形をしており、上述した方程式の作成は容易である。一般のミニマム・カットを求める問題は次のように表わされる.「カットの条件式 (13)

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \beta_{kt} x_k = 0, & t = 1, 2, \cdots, n-r \\ \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{u}_k^l = z_l \ , & l \in L, \\ x_k = -1, \ 0 \ \text{or} \ 1 \end{cases}$$

の下でカット値　(14) $M = \sum_{k=1}^{n} C_k x_k$ を最小にするような解 $X = (x_1, \cdots, x_n)$ を求めよ.」

(2) PERT/MANPOWER, RAMPS.　プロジェクト・ネットワーク上での資源配分問題の最適解を求めようとする場合、同時刻に作業(アーク)が遂行でき、かつ資源量の制約を満たすような作業の組合せを求めておく必要がある。このような作業の組合せは、ネットワークにおいて順方向のアークのみを含むカットの部分集合として求められる. このような作業の組合せは、方程式系

(15) $$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \beta_{kt} x_k = 0, \ t = 1, 2, \cdots, n-r, \\ \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{u}_k^l = z_l, \ l \in L, \\ x_k = 0 \ \text{or} \ 1 \end{cases}$$

および (16) $\sum_{k=1}^{n} b_{gk} x_k \leqq B_g, \ g = 1, 2, \cdots, r$

の解として求められる。ここで式(16)における b_{gk} は作業 k が必要とする資源 g の量をあらわし、B_g はプロジェクト全体に与えられた資源 g の量をあらわす。

4. Integer Programming による解法　以上の簡単な2例によって、カットを求める問題の定式化の方法を例示したが、問題の解を得ようとする場合には近年急速に進展した Implicit Enumeration Method を用いることができる。たとえば、(1)の問題は、変数 x_k を、

(17) $x_k = x_k^{(1)} - x_k^{(2)}, \ x_k^{(1)}, \ x_k^{(2)} = 0 \ \text{or} \ 1$

のように変形し、もとの方程式に代入することにより、0-1 Integer Programming の問題にすることができ、Ballas の Additive Algorithm が直接適用できよう。さらに、第2, 第3 のカット値をもつようなカットをも同時に得ることができる。また、(2)の問題において、すべての解を求めるには、システマティックな解の作成を行なわねばならないが、これに対しても、ブランチ・ノードを用いる列挙法は非常に有効である。

5. おわりに、近年、抽象・応用数学の分野においては、ネットワークに関する種々のトポロジカルな解析が行なわれており、工学分野への応用範囲も広まってきた。本稿においては、現在までに明らかにされているリニア・トポロジーの成果のほんの一部を用いて、われわれの対処する問題の定式化を試みるとともに、電子計算機の発達とともに著るしく進展してきている整数変数の方程式の解法の応用の一例を示した。