

振動時くいのくい固地盤破壊領域の計算

名城大学理工学部 土木工学教室 正会員 柴田道生

(1). 緒言

くいは、打込時においても、載荷後でも外力を受けて横振動し、地盤を圧入、このため地盤に圧縮波を矢へ、くい周より離れた地盤まで波及する。従って地盤は、締固められ、破壊域を生ずる。この破壊域は、くいの横振動によつてどのような断面形態をとるのであるうか、本文は之を察知せんとするものである。くいには、荷重が載荷されているので、当然、この荷重も考慮し、地盤は、単一の地盤ではないが、地盤係数を一定としている。くいは横振動し、地盤に応力を矢へるが、この応力の伝播を、熱の伝導機構と同一であると考えて、熱応力の理論を適用した。筆者は、実験砂槽の木製の模型くいの実験から、熱の伝導理論を用いて計算した計算値が、よく実験による計測値と、対応することを知った。

(2). くいの横振動方程式

くいの自由振動の方程式は次の(1)式で示される。即ち

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{IA}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2rky = 0 \quad \text{----- (1)}$$

但し、 E : くいの材の弾性係数 kg/cm^2

I : くいの断面二次モーメント cm^4

t : 時間 sec

y : 撓み cm

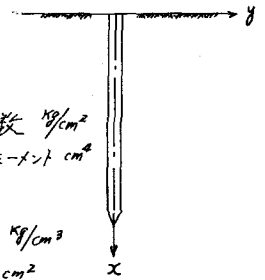
r : くいの半径 cm

γ : くいの単位重量 kg/cm^3

k : 地盤係数 kg/cm^3

A : くいの断面積 cm^2

図1



いま、自由振動を

$$y(x, t) = \phi(x) \cos pt \quad \text{----- (2)} \quad \text{とちき (2) を (1) に代入する}$$

と、

$$EI \frac{d^4 \phi}{dx^4} + 2rky = \frac{IA\rho^2}{\rho} \phi \quad \text{----- (3)} \quad \text{但し } p \text{ は円振動数}$$

次に、ある振幅で、くいが自由振動している場合、運動エネルギーと位置エネルギーの最大値を等しいとおくことによつて、円振動数 p が求められる。

いま先端 A を仮りに固定端と考へる。 B 点に、振幅 a 、円振動数 p の正弦運動が矢へられたとすれば、 B 点の変位を ϕ_1 とすると

$$\phi_1 = a \sin pt$$

C 点では、振幅は $a \frac{l_2}{l_1}$ で同じ振動数の正弦運動をするから、 C 点の

変位 ϕ_2 は、 $\phi_2 = a \frac{l_2}{l_1} \sin pt$ である。従つて運動の

エネルギーは、質量を m とすると

$$\frac{1}{2} \left\{ m \left(\frac{d\phi_1}{dt} \right)^2 + m \left(\frac{d\phi_2}{dt} \right)^2 \right\} = \frac{a^2}{2} \left\{ m + m \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^2 \right\} p^2 \cos^2 pt$$

であり、其の最大値 M は

$$M = \frac{a^2}{2} \left\{ m + m \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^2 \right\} p^2 \quad \text{----- (4)}$$

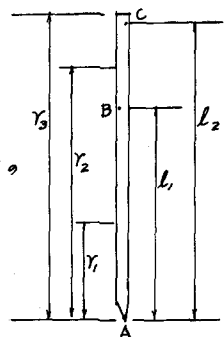


図2

一方質量 m の ξ_1 に変位したときの地盤の弾性係数の変動は、 $\xi_1 \frac{Y_1}{L_1}$, $\xi_1 \frac{Y_2}{L_1}$, $\xi_1 \frac{Y_3}{L_1}$ であるから、位置エネルギーは

$$\frac{1}{2} \left\{ k' \left(\frac{\xi_1 Y_1}{L_1} \right)^2 + k' \left(\frac{\xi_1 Y_2}{L_1} \right)^2 + k' \left(\frac{\xi_1 Y_3}{L_1} \right)^2 \right\} = \frac{1}{2} \{ k' Y_1^2 + k' Y_2^2 + k' Y_3^2 \} \frac{\xi_1^2}{L_1^2} \sin^2 \rho t \text{ となり 其の最大値 } M' \text{ は}$$

$$M' = \frac{1}{2} \{ k' Y_1^2 + k' Y_2^2 + k' Y_3^2 \} \frac{\xi_1^2}{L_1^2} \text{ ----- (5)}$$

(4) 式と (5) 式を等しいとおくことにより $\rho^2 = \frac{k' (Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2)}{m (L_1^2 + L_2^2)} \text{ ----- (6)}$

但し k' : 地盤の弾性係数

ここで地盤の弾性係数は、各点とも同一であると考へると

$$\xi_1 \frac{Y_1}{L_1} = \xi_1 \frac{Y_2}{L_1} = \xi_1 \frac{Y_3}{L_1} \text{ 即ち } Y_1 = Y_2 = Y_3 \text{ となるべきであり、地盤の弾性係数が同一であれば } Y_2 = L_1 \text{ と書かざるべきである。従つて (6) 式は}$$

$$\rho^2 = \frac{3 L_1^2 k'}{m (L_1^2 + L_2^2)} \text{ となり } L_1 = L_2 \text{ とおけば}$$

$$\rho^2 = \frac{3 \rho k'}{2 W} \text{ ----- (7)}$$

茲で W : 単位長さ当たりのくいの重さ。

次に (3) 式に (7) 式を代入すると (8) 式が得られる。

$$EI \frac{d^4 \xi}{dx^4} + 2 \rho k' \xi = \frac{3 A E k'}{2 W} \xi \text{ ----- (8)}$$

(8) 式を変形して $\frac{d^4 \xi}{dx^4} - \left(\frac{3 A E k' - 4 W \rho k'}{2 E I W} \right) \xi = 0$

いま $\beta^4 = \frac{3 A E k' - 4 W \rho k'}{2 E I W} = \frac{3 k' - 4 \rho k'}{2 E I}$ とおくと $\frac{d^4 \xi}{dx^4} - \beta^4 \xi = 0 \text{ ----- (9)}$

(9) 式の一般解は、 A, B, C, D を積分常数とすると

$$\xi = A \sin \beta x + B \cos \beta x + C \sinh \beta x + D \cosh \beta x \text{ ----- (10)}$$

境界条件式は、くいの先端 A 点を固定端と考へると $x=0$ で $\xi = \frac{d\xi}{dx} = 0$

従つて $C = -A$, $D = -B$ 故に (10) 式は、

$$\xi = A (\sin \beta x - \sinh \beta x) + B (\cos \beta x - \cosh \beta x) \text{ ----- (11)}$$

更に境界条件として、くいの頭 $x=l$ で F なる外力が正弦運動をすると考へると

$$\left. \begin{aligned} EI \frac{d^3 \xi}{dx^3} &= -F \sin \rho t \\ \text{又、} \frac{d^2 \xi}{dx^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ ----- (12)}$$

(12) の境界条件式を用いると

$$\left. \begin{aligned} EI \beta^3 \{ A (\cos \beta l + \cosh \beta l) - B (\sin \beta l - \sinh \beta l) \} &= F \\ A (\sin \beta l + \sinh \beta l) + B (\cos \beta l + \cosh \beta l) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ ----- (13)}$$

(13) 式より A, B を求めて (11) 式に代入すると

$$\frac{\xi}{\alpha} = \frac{3}{2} \cdot \frac{(\cos \beta l + \cosh \beta l)(\sin \beta x - \sinh \beta x) - (\sin \beta l + \sinh \beta l)(\cos \beta x - \cosh \beta x)}{(\beta l)^3 (1 + \cos \beta l \cdot \cosh \beta l)} \text{ ----- (14)}$$

$$\text{但し } \alpha = \frac{F l^3}{3 E I}$$

(3). 横振動によるくいの各点の変位量、応力並 α に圧縮波の伝播速度

いま、くいの長さ $l = 100 \text{ cm}$, $r = 7.5 \text{ cm}$, $J = 2484 \text{ cm}^4$, $E = 100,000 \text{ kg/cm}^2$, $k = 1.0 \text{ kg/cm}^2$
 $k' = 280 \text{ kg/cm}^2$ とすると $\beta = 0.0357 \text{ cm}^{-1}$ $\alpha = 0.61728 \text{ cm}$

従って、くい先端Aを原点とするくい各点の変位量、応力の値が(14)式によって求められる。
 之をオ1表に示す。但し、くい各点の応力 σ は $\sigma = \frac{F}{A}$ によって求めた。

このオ1表に示す応力は、横振動によるくい側面圧力 σ_0 であって、 σ_0 はくい周囲の地盤に圧縮波を夫へると考へる。さて、圧縮波の伝播速度 C_s は、乾燥砂を用いた Hendin-Richart の実験より次の(15)式が夫へされている。即ち

$$C_s = C_1 \sigma_0^{C_2} \dots \dots \dots (15)$$

但し、 C_s : 伝播速度 ft/sec

σ_0 : 振動による側圧 lb/in²

C_1, C_2 : 定数

実験によると、 C_2 の値は、 σ_0 が1kg/cm²以上では $C_2 = \frac{1}{4}$ 、1kg/cm²以下では、 $C_2 = \frac{3}{10}$ とされ、 C_1 の値は、 σ_0 が1kg/cm²以上の場合は $C_1 = (170 \sim 78.2)e$ 、1kg/cm²以下では、 $C_1 = (119 \sim 56.0)e$ とされている。ここでe: 間隙比である。

いま、 C_1 の値を兩者の平均値ととり、87.5とし、 C_s の算式を次の(16)式として $e = 0.61$ を夫へて、 σ_0 の値をオ1表の σ の値として伝播速度 C_s を求めたのがオ2表である。

$$C_s = 87.5 e \sigma_0^{\frac{3}{10}} \dots \dots \dots (16)$$

ここでオ1表の変位量 α の値の算出は、(14)式より求めたので

あるが(14)式の α の算出に用いたFの値は、重さ11.15kgの模型くいの砂層における載荷試験の結果より得た降伏点荷重の計測値460kgを用いている。

次に周期Tは $T = \frac{2\pi}{p}$ で表はされる。くいの単位長さ重量Wは、 $W = \frac{11.15 + 460}{100 \text{ cm}} = 4.7115 \text{ kg/cm}$ 、 $\rho = 280 \text{ kg/cm}^3$ 、 $g = 980 \text{ cm/sec}^2$
 $\therefore$ 円振動数 $p = 295.5684 \text{ sec}^{-1}$ (7)式、従つて $T = 0.021247 \text{ sec}$ 。

圧縮波の波長 $\lambda = TC_s$ によって示されるから、オ2表の C_s の値を用いて、くい各点の位置における圧縮波の波長をオ3表に示す。

(オ2表)

くい先端Aより距離	伝播速度 C_s
0 cm	0 m/sec
20	37.56
40	53.32
60	60.02
80	59.20
くい頭100	46.85

(オ3表)

くい先端Aより距離	波長 λ
0 cm	m
20	0.79
40	1.13
60	1.27
80	1.25
くい頭100	0.99

(4). 円柱面状熱源の理論式

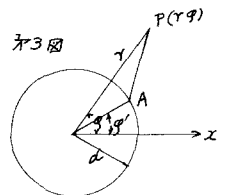
半径 $r = d$ の円柱上に、一様に長さの線状熱源が分布して発生する円柱面状熱源が、瞬間的に発現するとき、軸から r だけ離れた点の温度の理論式を適用して、円柱面状の線状応力をオ1表の応力 σ と考へ、くい軸より r の距離における応力 σ_r は

$$\sigma_r = \frac{\sigma d}{4\pi k_e t} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2+d^2-2dr \cos(\theta-\theta')}{4k_e t}} d\theta'$$

$$= \frac{\sigma d}{4\pi k_e t} e^{-\frac{r^2+d^2}{4k_e t}} \int_0^{2\pi} e^{\frac{dr}{2k_e t} \cos(\theta-\theta')} d\theta'$$

と示され、之をオ1種変形 Bessel 函数で表はすと

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{4\pi k_e t} e^{-\frac{r^2+d^2}{4k_e t}} I_0\left(\frac{dr}{2k_e t}\right) \dots \dots \dots (17)$$



但し、 $Q = 2\pi d\delta$

(17)式において、円柱面状線状応力は、横振動による、くい周面の応力であるが、円周長に沿う幅1cmきりの側面圧力と考へ、 σ の単位を kg/cm とする。

従つて、くい軸より任意の距離 r をとり、この点の応力を σ_r として (17) 式に、各々の数値を代入して、次の図4図、図5図を得る。この図によると、深さ Z 方向の応力の最大値は、 $Z = 40\text{cm}$ の深さであり、くい先端では、くい先端では、固定端と仮定したから変位は零で、勿論、応力は零である。図5図の破壊領域は、(17)式で求めた σ_r の値が著しく小さく零に近似する値の点をプロットしたものであるが、(17)式の構成より考へて、 t の時間が無限大でなければ σ_r が全く零とはなり得ない。したが無限大とは r が無限大であることを意味している。くいの貫入は、くいの体積に等しい土の押圧であり、この押圧による地盤の歪み、並に α に変位量の和がくいの体積に等しいと置くことで、破壊される範囲が求まるが、振動を受ける場合の破壊の領域は、もつと範囲が拡大されると思ふされる。

参考文献：

谷本喜一：杭打基礎の耐震性に関する基礎的研究、土木学会誌 40-4。

川下研介：熱伝導論。

神保泰雄：工業振動学演習
吉川英一

Tschebotarioff: Soil Mechanics, Foundations and Earth Structures (1952)

t : 時間で $t = \frac{r-d}{C_s}$

k_1 : 応力伝播指数で $k_1 = \frac{C_s k'}{k_2} \text{ cm}^2/\text{sec}$

C_s : 圧縮波の伝播速度 (表2の値)

k_2 : 地盤係数、 $1/\text{cm}^3$

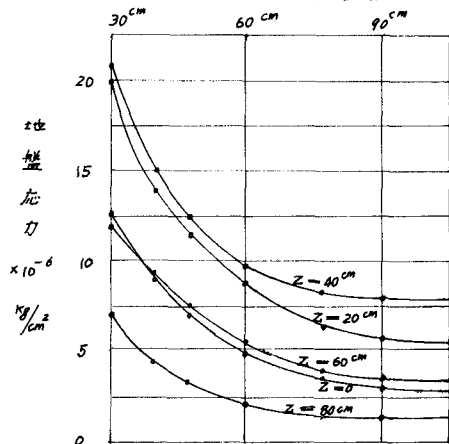
k' : 地盤の弾性係数 280 kg/cm^2

d : くいの半径で 7.5cm

r : くいの軸より任意の水平距離

σ : くいの側面圧力 (表1の σ の値)

図4 深さ Z 方向の地盤応力
くい軸よりの距離



破壊領域

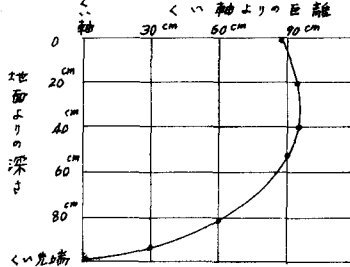


図5