

大阪工業大学 正員 岡村宏一

1. まえがき; 3次元弾性非軸問題に対して、高精度、かつ、取扱いの便利な一般的解法を見出すことは、従来、2次元問題に略近化して処理されていた諸問題や、局所的な問題に関して、忠実な評価を与える多量の情報を提供できることを意味する。しかしながら、この領域の問題は、久しく弾性力学における難関とされ、目下のところ、研究例も数少ない。軸対称問題については、E. Sternberg, および、I. N. Sneddon 一派の人々によってかなり研究されたが、それすら解析は煩雑である。一方、非軸問題に関しては、部分的に差分法を用いる解法¹⁾もあるが、一般性のある解法として、3次元要素を用いる有限要素法によるアプローチ^{2), 3)}が考えられている。しかし、有限要素法を用いる場合、しばしば、適当な検証資料が必要であるが、非軸状態、特に、局所的な精度について検討を行なうことのできる厳密な解析資料は皆無に近いと云ってよく、設計者にとって、計算費用、あるいは、準備作業のわずらわしさと、望ましい精度の間にある最適な条件を見出すための情報が目下のところ非常に乏しい。また、この種の問題に対する実験(光弾性実験など)の結果は、かばりばらつくことが多い。このような観点からみれば、有限要素法のみならず、この種の問題に対して取扱いの便利は、精度の高い一般的解法が多面的に研究される必要がある。筆者は、以上の諸点を考慮の上、3次元弾性非軸問題に対する一般的な1解法を考案し、種々の問題に対する系統的な応用の方法、精度などについて研究中である。本文では、解法、ならびに、dataの一部について報告する。

2. 解法; 本解法的基本的な性格は、"半無限弾性体から、任意の荷重状態、形状、境界条件を持つ3次元弾性体を切り取る"ことにあつた。どうせん、任意の3次元体を切り取ることができると同様に、任意の穴を切り取ることもできる。解法上、このような操作を行なうために、半無限体内に、ナイフのような鋭い作用を持つ分布力が与えられて、かくらんを起す。ところで、このような力の作用位置では、ある種の応力成分は singularity を持つ。したがって、そのごく近傍では望ましい条件を作り出すことはできない。そこで、半無限体内に設定された、任意のいくつかの面(以下、これらを調整面と呼ぶ)に、これらの力の分布が与えられ、真の境界面の条件は、それよりいくぶん離れた位置において満足させられる。すなわち、これらの分布力は、調整力としての役割を果たすことになる。つぎに、真の境界面の条件は、選点法によって満足させられる。したがって、本解法においては、差分法、あるいは、有限要素法のように、3次元体の内部に解析上の点を配置する必要はない。3次元体の内部では、厳密な連続解が与えられており、ただ、表面のみに

- 1) 色部、後藤、3次元弾性問題の数値解法、日本学会論文報告集、138、1967、11~20
- 2) Argyris J. H., and others, Some new elements for the matrix displacement method Proc. of Conf. on Matrix Method in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1969, 333-398
- 3) Field S. A., Three Dimensional Theory of Elasticity Finite Element Method in Stress Analysis, Tapir, 1969, 333-363

必要最小限の点を設けて解析するものである。また、3次元体の形状や、境界条件として、原理的に任意なものを採ることができる。

さて、弾性体の内部に調整力を与え、*singularity*の問題を回避しつつ、任意の境界を作り出す方法は、すでに、E.R.Araneto Oliveria⁴⁾によって、2次元問題の解析に試みられ、穴あきシャイブの問題に関して、精度の確認とともにすぐれた成果を提供している。また、筆者らは、面内、面外の両作用をもつ斜板を含む構造物の立体解析に、このような考えを拡張して用いた。⁵⁾ 本解法は本質的に、この種の手法をさらに発展させて一般化し、3次元非軸問題の解決を可能にしたものである。ところで、本解法に用いられる諸関数はすべて代数関数であり、解析上の取扱いは便利である。また、すでに、基本的な問題について精度の確認を行なっている。以下、解法について、さらに詳しく述べる。

半無限弾性体内にかくらんを起す力を与える基本解として、図-1に示すような、弾性体内の任意点に垂直、ならびに水平方向の集中力がそれぞれ作用する Mindlin の 1, 2 問題の解を用いる。この際、 $D=0$ とすれば、表面力に対する Boussinesq, Cerruti, の解が得られ、これらの積分は、しばしば、表面荷重に対する特解として利用される。

さて、半無限弾性体内にナイフのような作用をおよぼす分布力の要素を、図-2 に見るように、前述の基本解をそれぞれ、垂直、水平、斜め方向の長方形面に積分して与える。それぞれの面に作用する各方向の分布力の強さを、 $S, q, t, \dots$ で表わし、これらによる弾性体内の任意点の応力成分を図-2 の下にあるように記述する。演算記号は次のような意味を持つ。たとえば、

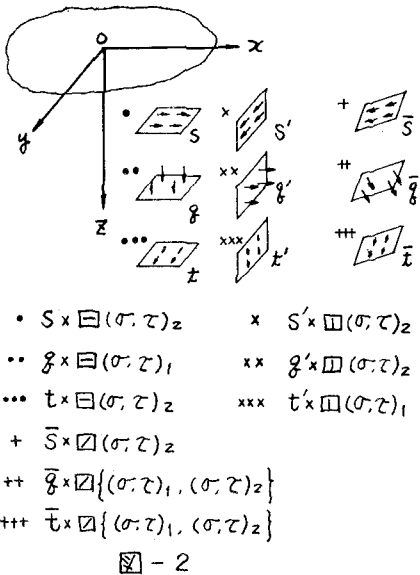
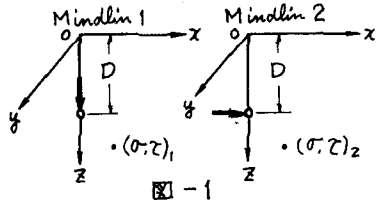
曰(5,7)₂; 単位荷重に対する Mindlin の 2 向問題の応力成分の水平長方形面への積分,

④(7,2); 単位荷重に対する Mindlin の 1 向問題の応力成分の垂直長方形面への積分,

□(0, c)_z: 単位荷重に対する Mindlin の 2 問題の応力成分の斜め長方形面への積分,

$\Omega_1(0, \tau), (0, \tau)_2$; 互に直角なコンポーネントに対する
 Mindlin の 1 向問題, の 2 向問題の応力成分
 の斜の長方形面への積分を重ね合わせ.

従来、これら Mindlin 解の重積分はむづかしいとさ $\leftrightarrow \bar{\sigma} \times \square \{ (0, z)_1, (0, z)_2 \}$
 れていたが、本解法に用いるものはすべて積分可能 $\leftrightarrow \bar{\tau} \times \square \{ (0, z)_1, (0, z)_2 \}$
 である。特解として用いる半無限体の表面に作用す 図 - 2



4) Oliveria, E.R.A. Plane stress analysis by a integral method. Proc. of A.S.C.E. EM1. 1968, 79-101

5) 岡村, 構造物の立体解析法, 構造物設計法の最近の進歩と問題点, 土木学会関西支部
講習会テキスト, 1971.

る垂直、および水平方向の分布力、 g_0, S_0 による応力成分、 $g_0 \times \text{日}(\sigma, \tau)_{1,0=0}, S_0 \times \text{日}(\sigma, \tau)_{2,0=0}$ を含めて、解析上必要は応力関数は56種類である。紙面の都合上、その1例を記述しておく。

応力関数の1例： 日 $(\sigma, \tau)_1$

$$\sigma_x = \alpha \bar{\sigma}_x, \sigma_y = \alpha \bar{\sigma}_y, \sigma_z = \alpha \bar{\sigma}_z, \tau_{xy} = \alpha \bar{\tau}_{xy}, \tau_{xz} = \alpha \bar{\tau}_{xz}, \tau_{yz} = \alpha \bar{\tau}_{yz},$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x = & -2(1-\mu)(1-2\mu)\sin^{-1} \frac{ab(a^2-b^2)}{A_2 B_2 [C_2^2 + \{2C_2 + (Z+D)\}(Z+D)]} + 2\mu \sin^{-1} \frac{ab}{A_1 B_1} \\ & + 2(1-2\mu^2)\sin^{-1} \frac{ab}{A_2 B_2} + \frac{ab(Z-D)}{A_2^2 C_1} + \frac{2ab(a^2+b^2)ZD}{(Z+D)A_2^2 C_2^2} + \frac{b(Z+D)}{a C_2} \left\{ \frac{1}{A_2^2} - 3a^2 \right. \\ & \left. + \frac{4\mu a^2 Z}{Z+D} + \frac{4a^2 b^2}{(Z+D)^4} + \frac{4a^2 b^2}{(Z+D)^2} \right\} - \frac{4a^2 ZD}{A_2^2 (Z+D)^4} + \frac{4\mu a^2 b}{B_2^2 (Z+D)} \end{aligned}$$

$$\bar{\sigma}_z = 2(1-\mu) \left\{ \pm \sin^{-1} \frac{ab}{A_1 B_1} + \sin^{-1} \frac{ab}{A_2 B_2} \right\} + \frac{ab(Z-D)}{C_1} \left(\frac{1}{A_1^2} + \frac{1}{B_1^2} \right) + \frac{ab(a^2+b^2)ZD}{3(Z+D)C_2^3}$$

$$\times \left(\frac{1}{A_2^2} + \frac{1}{B_2^2} \right) + \frac{ab}{(Z+D)C_2} \left\{ (3-4\mu)Z^2 + 2(5-2\mu)ZD + D^2 \right\} \left(\frac{1}{A_2^2} + \frac{1}{B_2^2} \right) - 4 \frac{abZD}{(Z+D)C_2} \left(\frac{a^2}{A_2^2} + \frac{b^2}{B_2^2} \right)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \left\{ \frac{4(1-\mu)}{2(1-2\mu)^*} \right\} - (5-8\mu) \frac{D}{Z+D} + \frac{D(Z-D)}{(Z+D)^2} - 4(1-\mu)(1-2\mu) \log \frac{(A_2+Z+D)(B_2+Z+D)}{Z(Z+D)(C_2+Z+D)}$$

$$- (3-4\mu)(Z-D) \left(\frac{1}{A_2^2} + \frac{1}{B_2^2} - \frac{1}{C_2^2} \right) - ZD(Z+D) \left(\frac{1}{A_2^3} + \frac{1}{B_2^3} - \frac{1}{C_2^3} \right) - (Z-D) \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1} \right)$$

$$\bar{\tau}_{xz} = (1-2\mu) \log \frac{(B_1+b)(Z+D)(C_2+b)A_1}{(B_2+b)(Z-D)(C_1+b)A_2} + b \left\{ \frac{1}{B_1} - \frac{(Z-D)^2}{A_1^2 C_1} \right\} + b \left\{ (3-4\mu)Z(Z+D) + D(Z-D) \right\} \left\{ \frac{1}{(Z+D)^2 B_2} - \frac{1}{A_2^2 C_2} \right\}$$

$$+ ZD \left\{ \frac{1}{B_2^2} + \frac{1}{A_2^2 C_2} \left\{ \frac{2a^2}{A_2^2} - \frac{(Z+D)^2}{C_2^2} \right\} \right\}$$

ただし、 $\alpha = \frac{1}{8(1-\mu)\pi}$, $A_1 = \sqrt{a^2 + (Z-D)^2}$, $A_2 = \sqrt{a^2 + (Z+D)^2}$, $B_1 = \sqrt{b^2 + (Z-D)^2}$, $B_2 = \sqrt{b^2 + (Z+D)^2}$, $C_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + (Z-D)^2}$, $C_2 = \sqrt{a^2 + b^2 + (Z+D)^2}$, μ : ポアソン比、また、記号*は $D > Z$ の場合である。さらに、 $\bar{\sigma}_y$, $\bar{\tau}_{yz}$ は、 $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\tau}_{xz}$ において、 x, y は各方向の値を入れ換えて求めらる。

なお、これらの応力は、図-3にみるように、長方形面の1つの隅点を通る線上の点に対して与えられるが、重ね合わせによって、任意の長方形、および任意点に対する応力が求まる。そのほか、3方向の変位成分、 u, v, w も応力の場合と同様に与えられる。

さて、図-4によって、まず、半無限体から、所要の三次元体を分離する操作を説明する。ここでは、表面荷重を受ける直方体の問題が扱われる。図のように半無限体の表面に荷重を与え、求める直方体の外側を囲んで、垂直、および水平調整面①、②、③を設定し、これらの調整面のそれぞれを、有限長方形領域(i, j, r など)によって分割する。さらに、図-2に示した方法で、これらの長方形領域のそれぞれにおいて等分布する調整力(g_i, S_i , など)を与え、それらの作用によって、真の境界面の境界条件を調整する。すなわち、調整力は未知量である。

また、有限領域の分割、調整面と境界面の距離は境界条件の精度に対応して定める。いま、境界面(側面)上の選点 m は自由、または、一定の外力を受ける条件を持つ

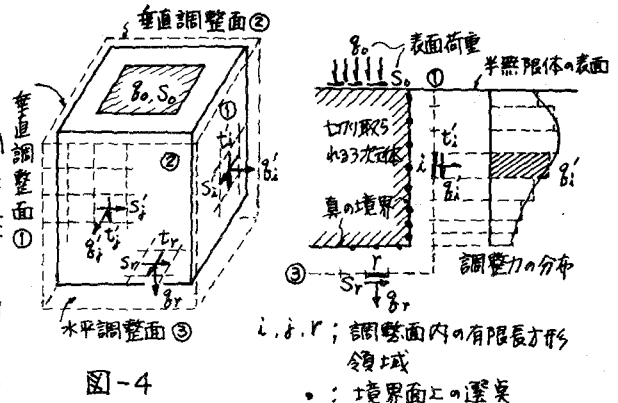


図-4

i, j, r : 調整面内の有限長方形領域
 $\bullet$: 境界面上の選点

とすれば,

$$(\sigma, \tau)_m = \sum_i \{ S'_i \times \sigma(\sigma, \tau)_2 + g'_i \times \sigma(\sigma, \tau)_2 + k'_i \times \sigma(\sigma, \tau)_1 \}_m + \sum_j \{ S'_j \times \sigma(\sigma, \tau)_2 + g'_j \times \sigma(\sigma, \tau)_2 + k'_j \times \sigma(\sigma, \tau)_1 \}_m \\ + \sum_f \{ S_f \times \sigma(\sigma, \tau)_2 + g_f \times \sigma(\sigma, \tau)_1 + k_f \times \sigma(\sigma, \tau)_2 \}_m + \{ S_0 \times \sigma(\sigma, \tau)_{2, D=0} + g_0 \times \sigma(\sigma, \tau)_{1, D=0} \}_m = 0 \text{ or } C_m$$

また、底面の選点 m が変位拘束の条件を持つならば、 $(u, v, w)_m = 0$

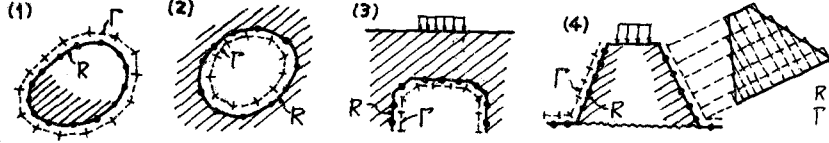


図-5 (1) 任意断面柱

(2) 穴の切り取り

(3) 厚板

(4) 裁頭錐体

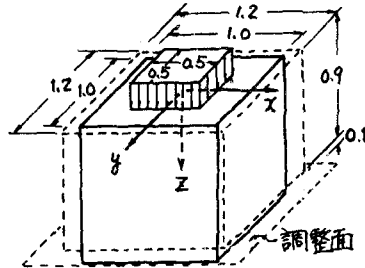


図-6 頂面に分布荷重を受ける立方体

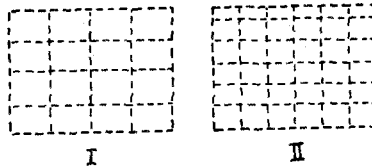


図-7 垂直調整面の分割

図-5は、座標回転、斜めの分割面の解 $\sigma(\sigma, \tau)$ を併用して、各種の問題の境界面を調整する方法と断面図によって示したものである。

3. 計算データ;

基本的なデータとして、表面荷重 g_0 を受ける立方体の側面(自由面)を切り取る模様を示す。図-8は、表面荷重によって半無限体内に存在した応力が、調整によって、境界面で比較的簡単に、精度良く消滅することを示す。図-9に直方体の内部応力の分布の1部を示した。

4. むすび;

目下、図-5に示したような諸問題について研究を続行中であり、近く発表の予定である。

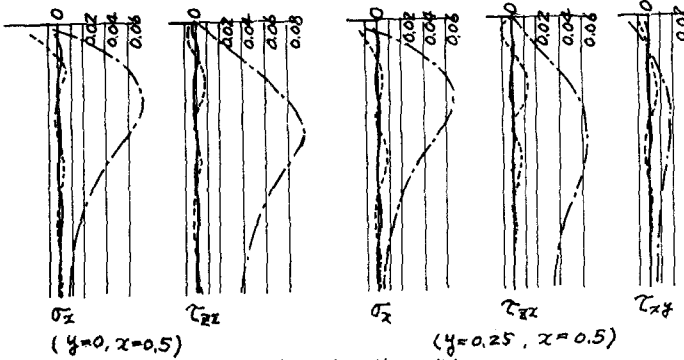


図-8 境界調整の精度

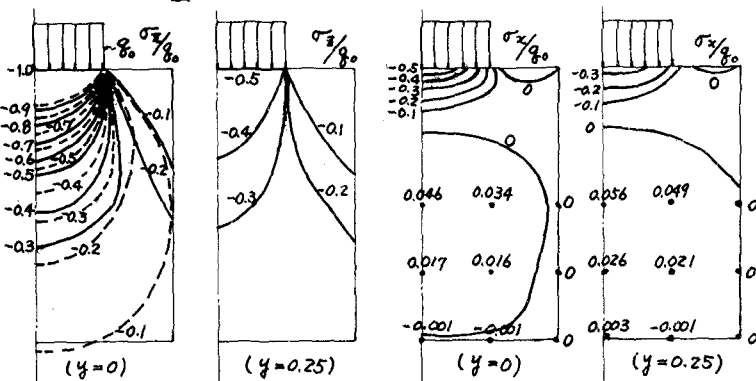


図-9 応力分布