異方性Cosserat物体内の応力分布について

京都大学　正員　小林　昭一

1. はじめに　従来の連続体力学（古典連続体力学）は，対象とする材料（物質）内の全ての点に対して，a)密度の一様連続性，および b)運動方程式ならびに構成方程式の同一性という基本仮説の上に構成されている。従って，古典連続体力学の数学モデルでは，材料の幾何学的特性を表わすものは材料(物質)粒子の位置だけである。しかしながら，実在の材料を見ると，例えば岩石，岩盤あるいはコンクリートのように種々の形状特性を有する同質ないし異質物質の結合体とか，あるいは複合材料のような異質物質の結合体が極めて多い。更に，結晶ないし分子のオーダーまで考えれば，古典連続体力学の基本仮定は最早や満たされないのは明らかである。従って，材料の構成要素の特性も考慮した力学が必要となって来る。構成要素の幾何学的形状および局所変形までをも考慮した力学は総称して一般連続体力学，その対象とするモデルはCosserat物体と呼ばれている。

ここでは，特にそのうちの一つ，Mindlin の couple stress 理論を異方性にまで拡張し，2,3の具体例について応力解析を行ない，その特徴を検討してみる。特に，異方性体について附言すれば，巨視的な異方性は主として材料の層状構造に起因することを考えると，従来の均質異方性の概念を適用することが困難であり，従って従来の異方性連続体力学による解析では不十分な場合も多いと思われる。特に，応力集中とか破壊に関連した局所的な挙動を対象とする場合には，ここで述べる異方性 couple stress 理論は極めて重要な意味をもって来るであろう。

2. 基礎方程式　線形異方性 couple stress 理論の基礎方程式を以下に示す。簡単のために，平面歪状態にあるものとし，直交 Cartesian 座標 x^α により表示する。

a) 歪，回転，曲率と変位との関係　変位，歪，回転および曲率をそれぞれ $u_\alpha, d_{\alpha\beta}, \omega^3, \kappa_\alpha^3$ と表わすと，これらの間には次の関係が成立する。

$$d_{\alpha\beta}=u_{(\alpha/\beta)}=(u_{\alpha/\beta}+u_{\beta/\alpha})/2 \quad (\alpha,\beta=1,2),\quad \omega^3=u_{[2/1]}=(u_{2/1}-u_{1/2})/2,\quad \kappa_\alpha^3=\omega^3{}_{/\alpha} \qquad (1)$$

ここに，$u_{\alpha/\beta}$ は u_α の x^β による微分を，( ) および [ ] は，それぞれ対称および逆対称部分を示す。

b) 釣り合い式　Cauchy 応力および couple stress をそれぞれ $\tau^{\alpha\beta}, m^{\alpha 3}$，body force および body couple を f_α, c^3 とすると，釣り合い式は次のようになる。

$$\tau^{\beta\alpha}{}_{/\beta}+f^\alpha=0 \quad , \quad m^{\alpha 3}{}_{/\alpha}+\varepsilon^{3\alpha\beta}\tau_{\alpha\beta}+c^3=0 \qquad (2)$$

ここに，$\varepsilon^{3\alpha\beta}$ は permutation tensor である。総和規約を適用する(以下同様)。

c) 構成方程式　構成方程式は次のように表わされる。

$$\tau^{(\alpha\beta)}=E^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}d^{\gamma\delta}+K^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}\kappa^{\gamma\delta} \quad , \quad m^{\alpha\beta}=M^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}\kappa^{\gamma\delta}+N^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}d^{\gamma\delta} \qquad (3)$$

ここに，$E^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}, M^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}$ などは材料定数である。特に，以下では Cauchy stress と couple stress との coupling はないものと仮定する。すなわち，$K^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}=N^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}=0$。この仮定により，

$$E^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}=E^{\beta\alpha}_{\gamma\delta}=E^{\alpha\beta}_{\delta\gamma}=E^{\beta\alpha}_{\delta\gamma}=E^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} \quad , \quad M^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}=M^{\beta\alpha}_{\gamma\delta}=M^{\alpha\beta}_{\delta\gamma}=M^{\beta\alpha}_{\delta\gamma}=M^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} \qquad (4)$$

が成立する．(最後の式は Cartesian 座標に対してのみ成立)．

異方性 couple stress 理論の field eq. は式(3)に(1)を代入し，更にこれを(2)に代入することにより求められる． 以下に直交異方性 Cosserat 物体に関して具体的な式を導く．

直交異方性で，かつ平面歪状態にある場合には，独立な弾性定数は $E^{11}_{11}, E^{11}_{22}, E^{22}_{22}, E^{12}_{12}\,;\, M^{13}_{13}, M^{23}_{23}$ のみとなる．従って，式(3)は式(5)のようになる． 今，弾性主軸系 x^α から φ だけ反時計回りに回転した新しい座標系 $\bar{x}^\alpha$ を取ると，この座標系に関しては式(6)が成立する． ここに ‾ をつけたのは，座標系 $\bar{x}^\alpha$ に関する諸量を表わす．材料定数の間には次の変換式が成立している．

$$\begin{pmatrix}\tau_{11}\\ \tau_{22}\\ \tau_{(12)}\\ m_{13}\\ m_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E^{11}_{11} & E^{22}_{11} & & & \\ E^{11}_{22} & E^{22}_{22} & & 0 & \\ & & E^{12}_{12} & & \\ & 0 & & M^{13}_{13} & \\ & & & & M^{23}_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_{11}\\ d_{22}\\ d_{12}\\ \kappa_{13}\\ \kappa_{23}\end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix}\bar{\tau}_{11}\\ \bar{\tau}_{22}\\ \bar{\tau}_{(12)}\\ \bar{m}_{13}\\ \bar{m}_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{E}^{11}_{11} & \bar{E}^{22}_{11} & \bar{E}^{12}_{11} & & \\ \bar{E}^{11}_{22} & \bar{E}^{22}_{22} & \bar{E}^{12}_{22} & 0 & \\ \bar{E}^{11}_{12} & \bar{E}^{22}_{12} & \bar{E}^{12}_{12} & & \\ & 0 & & \bar{M}^{13}_{13} & \bar{M}^{23}_{13}\\ & & & \bar{M}^{13}_{23} & \bar{M}^{23}_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{d}_{11}\\ \bar{d}_{22}\\ \bar{d}_{12}\\ \bar{\kappa}_{13}\\ \bar{\kappa}_{23}\end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\bar{E}^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}=E^{ij}_{kl}\frac{\partial\bar{x}^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\bar{x}^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^\gamma}\frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^\delta}\,,\quad \bar{M}^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}=\cdots \tag{7}$$

式(1),(2)を座標系 $\bar{x}^\alpha$ に関する式に変換し，これに式(6)を用いて簡単な計算を行なうと，変位で表わした field eq. が求められる． 以下では簡単のために ‾ は省略する．

$$\left.\begin{aligned}&E^{11}_{11}u_{1,11}+E^{22}_{11}u_{2,12}+E^{12}_{11}(3u_{1,12}+u_{2,11})/2+E^{22}_{12}u_{2,22}+E^{12}_{12}(u_{1,22}+u_{2,12})/2\\ &\quad+\{M^{13}_{13}(u_{2,1112}-u_{1,1122})+2M^{13}_{23}(u_{2,1122}-u_{1,1222})+M^{23}_{23}(u_{2,1222}-u_{1,2222})\}/4+C^{3}_{,1}/2+f_1=0\\ &E^{11}_{12}u_{1,11}+E^{22}_{11}u_{1,12}+E^{22}_{12}(u_{1,22}+3u_{2,12})/2+E^{22}_{22}u_{2,22}+E^{12}_{12}(u_{1,12}+u_{2,11})/2\\ &\quad-\{M^{13}_{13}(u_{2,1111}-u_{1,1112})+2M^{13}_{23}(u_{2,1112}-u_{1,1122})+M^{23}_{23}(u_{2,1122}-u_{1,1222})\}/4-C^{3}_{,2}/2+f_2=0\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

応力成分は次のように与えられる．

$$\left.\begin{aligned}&\tau_{11}=E^{11}_{11}u_{1,1}+E^{22}_{11}u_{2,2}+E^{12}_{11}(u_{1,2}+u_{2,1})/2\,,\quad \tau_{22}=E^{11}_{22}u_{1,1}+E^{22}_{22}u_{2,2}+E^{12}_{22}(u_{1,2}+u_{2,1})/2\\ &\tau_{12}=E^{11}_{12}u_{1,1}+E^{22}_{12}u_{2,2}+E^{12}_{12}(u_{1,2}+u_{2,1})/2-\{M^{13}_{13}(u_{2,111}-u_{1,112})+2M^{13}_{23}(u_{2,112}-u_{1,122})+M^{23}_{23}(u_{2,122}-u_{1,222})\}/4-C^3/2\\ &\tau_{21}=E^{11}_{12}u_{1,1}+E^{22}_{12}u_{2,2}+E^{12}_{12}(u_{1,2}+u_{2,1})/2+\{M^{13}_{13}(u_{2,111}-u_{1,112})+2M^{13}_{23}(u_{2,112}-u_{1,122})+M^{23}_{23}(u_{2,122}-u_{1,222})\}/4+C^3/2\\ &m_{13}=M^{13}_{13}(u_{2,11}-u_{1,12})/2+M^{23}_{13}(u_{2,12}-u_{1,22})/2\,,\quad m_{23}=M^{13}_{13}(u_{2,12}-u_{1,22})/2+M^{13}_{23}(u_{2,11}-u_{1,12})/2\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

上式に於て，$E^{11}_{11}=E^{22}_{22}$, $M^{13}_{13}=M^{23}_{23}$ とすれば等方 Cosserat 物体に関する基本式が得られる．

3. 解析例

立方体供試体を剛体盤で加圧した場合の応力分布の例を示す．等方性の場合には弾性定数として，$E_1=E_2$ ($\neq E_3$), $\nu=0.2$，couple stress 理論の場合には，更に $l/a=0.1$ ($l^2=M/G$, a=立方体辺長) とした．異方性の場合には，$E_2=0.5E_1=E_3$, ($1/G=1/E_1+1/E_2+2\nu_{21}/E_2$) $\nu_{31}=\nu_{21}=\nu_{32}=0.2$，異方性 couple stress の場合には，更に $l_1/a=0.1$, $l_2\doteqdot 0.5l_1$ とし，$\varphi=45°$ のときの結果のみを示した． その他詳細については当日発表する．