

空洞周辺応力の積分方程式による解析

京都大学 工学部 正員 丹羽 義次

京都大学 工学部 正員 小林 昭一

運輸省 正員 〇横田 和男

1. はじめに

近年、地下発電所やトンネル等の巨大地中構造物の建設が盛んに行なわれるようになり、地盤や岩盤内に空洞が存在する時の応力状態が大きな問題となつてきている。地盤や岩盤は第1次近似として、完全弾性体と見なすことができ、したがって弾性体内の空洞周辺の応力状態を解析する必要がある。弾性体内に不連続面が存在するときの応力解析は、応力集中の問題として、実験的にも、理論的にも、古くから数多くの人によって研究されてきている。特に静的な2次元問題については、Kolossoff-Muskhelishvili 等が発展させた複素関数と等角写像を用いる方法は非常に有効な方法であり、この方法によって解析された例は数多くある。しかしながらこの方法は一般的に3次元問題や動的な問題を取り扱うことは出来ない。一方、我が国のような地震の多い国においては常に動的な荷重が作用した時の挙動を必ず調べなくては必要であるにもかかわらず、有効な解析法がなかなかあつて、動的な問題を取り扱った例は少ない。本研究では弾性学の境界値問題の解法として積分方程式に帰着させる方法を用いて動的な場合も含めて空洞周辺応力の解析を行ふ。主として、弾性学の境界値問題の積分方程式による表示

2. 場の方程式

物体力の作用しない2次元問題(平面歪)で定常問題を取り扱う時、領域 D_i 内部では、変位ベクトル U は次の方程式を満足する。

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot U + \mu \nabla^2 U + \rho \omega^2 U = 0$$

簡単のため $(G^2 - G^2) \nabla \nabla \cdot + G^2 \nabla^2 = \Delta^*$ という演算子を考えれば、上式は

$$(\Delta^* + \omega^2) U(x) = 0 \quad \dots \dots \dots (1), \quad \text{ここで } G^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}, \quad G^2 = \frac{\mu}{\mu}$$

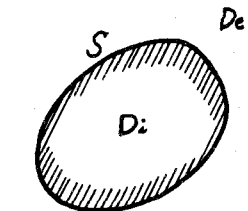


図1

2). 境界条件

$T^*U = 2\mu \frac{\partial U}{\partial n} + \lambda m \cdot \text{div } U + \mu (n \times \text{rot } U)$ という微分演算子 T^* を考える。ここで m は外向法線ベクトルで、 T^*U は一般に応力ベクトルと呼ばれているものである。境界条件として次の2つが考えられる。

- S 上で U の値が与えられる。(第1種境界値問題)
- S 上で T^*U の値が与えられる。(第2種境界値問題)

3). 基本特異解

次の方程式を満足する行列を Green Tensor あるいは Green Matrix と呼ぶ。

$$(\Delta^* + \omega^2) \Gamma(x; y) = -\delta(x-y) I, \quad \text{ここで } I \text{ は単位行列, } \delta(x-y) \text{ は Dirac 関数である。}$$

$$\Gamma_{jk} = \frac{1}{4\mu} (\psi \delta_{jk} - \chi r_{jk} r_{kl}), \quad \text{ここで } r \text{ は点 } x \text{ と } y \text{ の間の距離, } r_{jk} = \frac{\partial r}{\partial x_j} \text{ である。}$$

$$\psi = H_0^{(0)}(z_1 r) - \frac{1}{z_1 r} H_1^{(0)}(z_1 r) + \frac{z_1^2}{z_2^2} \frac{1}{z_1 r} H_1^{(0)}(z_1 r)$$

$$\chi = -H_2^{(0)}(z_1 r) + \frac{z_1^2}{z_2^2} H_2^{(0)}(z_1 r) \quad \text{ここで } z_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad z_2 = \frac{\omega}{c_2}, \quad H_n^{(0)} \text{ は } n \text{ 次の第1種ヘルムホルツ関数}$$

である。静的なつりあい問題は $\omega = 0$ とした時で、この時の Γ_{jk} を Γ_{jk}^0 とすれば、

$\sigma_{jk} = \frac{1}{4\pi(\lambda+\mu)} \{ (\lambda+\mu) \log r - (\lambda+\mu) r_{ij} r_{ik} \}$. σ_{jk} の物理的意味は、点 y で x_0 方向に単位の集中力が働いた時の点 x における x_j 方向の変位である。次に Π に演算子 T を作用させた行列を考えよのであるが、 $\Pi(x, y)$ は x と y の関数であるが、微分をおこなう変数において2つの種類が存在する。 $\Pi(x, y)$ の x の方に T を作用させた行列を Π_I , y の方に作用させた行列を Π_E と入れ換えたものを Π_E とすれば Π_I, Π_E は共に方程式(10)を満足する。

$$\Pi_{Ejk} = \frac{1}{4} \{ (\delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} + r_{ij} r_{kl} + \frac{\lambda}{\mu} r_{ij} r_{kl}) \frac{\partial \psi}{\partial x_k} - \{ (\delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} + r_{ij} r_{kl}) + 2(r_{ij} r_{kl} - 2r_{ik} r_{jl} \frac{\partial}{\partial x_k}) + \frac{\lambda}{\mu} r_{ij} r_{kl} \} \frac{\partial}{\partial x_k} - \{ 2r_{ik} r_{jl} \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\lambda}{\mu} r_{ik} r_{jl} \frac{\partial}{\partial x_k} \} \}, \text{ 即ち } r_{ij} = \frac{x_i x_j}{r^2} \text{ であり, } \frac{\partial}{\partial x_k} \text{ の微分は点 } x \text{ について行う。}$$

4. 一重層ポテンシャルと二重層ポテンシャル

$\varphi(y)$ を連続な密度ベクトルとすると一重層、および二重層ポテンシャルは次のように定義できる。

(a) 一重層ポテンシャル... $u_I = \int \Pi(x, y) \cdot \varphi(y) dy$

i) 一重層ポテンシャルは全空間で連続である。

ii) $\{T^+ u_I(x_0)\}_i = \frac{1}{2} \varphi(x_0) + \int \Pi_I(x_0, y) \cdot \varphi(y) dy$

$\{T^- u_I(x_0)\}_i = -\frac{1}{2} \varphi(x_0) + \int \Pi_I(x_0, y) \cdot \varphi(y) dy$

即ち $x_0, y \in S$, $\{ \}_i$ は内側から近づく極限值, $\{ \}_e$ は外側から近づく極限值を示す。

(b) 二重層ポテンシャル... $u_{II}(x) = \int \Pi_I(x, y) \cdot \varphi(y) dy$

i) $\{u_{II}(x_0)\}_i = -\frac{1}{2} \varphi(x_0) + \int \Pi_I(x_0, y) \cdot \varphi(y) dy$, $\{u_{II}(x_0)\}_e = \frac{1}{2} \varphi(x_0) + \int \Pi_I(x_0, y) \cdot \varphi(y) dy$

ii) $\{T^+ u_{II}(x_0)\}_i = \{T^- u_{II}(x_0)\}_e$

5. 境界値問題の解

(a) 第1種境界値問題の解は一重層ポテンシャルの形で書き表わされる。したがって境界条件が $\{u_I(x_0)\}_i = f(x_0)$, $x_0 \in S$ である境界値問題は未知の密度 $\varphi(y)$ に対する次の積分方程式に帰着される。

$$f(x_0) = \frac{1}{2} \varphi(x_0) + \int \Pi_I(x_0, y) \cdot \varphi(y) dy$$

(b) 第2種境界値問題の解は一重層ポテンシャルの形で書き表わされる。したがって境界条件が $\{T^+ u_I(x_0)\}_i = f(x_0)$, $x_0 \in S$ である境界値問題は、未知の密度 $\varphi(y)$ に対する次の積分方程式に帰着される。

$$f(x_0) = \frac{1}{2} \varphi(x_0) + \int \Pi_I(x_0, y) \cdot \varphi(y) dy \quad (2)$$

5. 数値計算法

空洞周囲の応力を解析する問題は第2種境界値問題であるので(2)の積分方程式を解くがよい。しかしながら(2)の積分方程式は $x_0=y$ の時特異性を持ち、解析的に解ける例はまれである。実際の数値計算の方法としては、特異性を除くため図2に示すような平行曲面 S^* を考え、この S^* を多角形に近似して、この边上では密度は線形に変化するものとして(2)の積分方程式を連立一次方程式に変換して計算をおこなった。図4や図5に示すように、円孔に平面波が入射した時の、円孔の線応力である。図5は同じ問題を Pao が別の方法で解いた例で、両者の結果は非常によく一致している。(参考文献) Kupradze: Potential Method in Theory of Elasticity

