

京都大学工学部 正 員 後藤尚男
京都大学大学院 学生員 佐藤忠信

地震時の地殻の動的挙動を調べる場合、地殻を構成する物質を均質等方な線形弾性体とみなしその振動性状を解析する。しかし土木構造物の安全性に関係する地表層では層を構成する物質は地殻のそれと比べると非常に軟かく、かつ固体、液体、気体の3相から構成されているから、このような物質を単一相からなる線形弾性体と考えることはかなり大胆な仮定といえる。また地震時の地表層の動的挙動を解析するためには土の動的な物理定数と波動の伝播速度の関係が明らかにされなければならぬ。ここでは、地表層を構成する土を水で飽和された等方性の非線形多孔質弾性体と考え、このような物質中を伝播する波動の伝播速度を求める第一段階として、圧縮波の非線形波動解について論ずる。

1. 圧縮波の存在条件

水で飽和された非線形多孔質弾性体を支配する運動方程式の筆者等による研究¹⁾によれば、基準座標系としてカルテシアン座標を用いて、次式で運動方程式が与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \rho_{11} \ddot{U}_I + \rho_{12} \ddot{V}_I + b(\dot{U}_I - \dot{V}_I) + \rho^s G_i^s &= \left(\frac{\partial W}{\partial U_{I,J}} \right)_{,J} \\ \rho_{12} \ddot{U}_I + \rho_{22} \ddot{V}_I - b(\dot{U}_I - \dot{V}_I) + \rho^f G_i^f &= \left(\frac{\partial W}{\partial V_{I,J}} \right)_{,J} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、 U_I ：弾性相の変位、 V_I ：流体相の変位、 W ：系全体のひずみエネルギー、 ρ_{11} , ρ_{12} , ρ_{22} ：孔けきを流れる流体の相対速度が一様でないことを考慮に入れた質量係数、 $\cdot$ ： $\partial/\partial t$, $_{,J}$ ： $\partial/\partial X_J$ 、 ρ^s , ρ^f ：弾性相と流体相の単位質量、 G_i^s , G_i^f ：弾性相と流体相の物体力、 b ：ダルシー形減衰係数である。なお質量係数の間には次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \rho^s &= \rho_{11} + \rho_{12} \quad , \quad \rho^f = \rho_{12} + \rho_{22} \\ \rho_{11} > 0 \quad , \quad \rho_{22} > 0 \quad , \quad \rho_{12} < 0 \quad , \quad \rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2 &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式(1)で物体力、ダルシー形減衰を無視した場合について考える。いま座標 X_I を波動の伝播する方向と一致させれば、 $U_I = U_I(X_I, t)$, $V_I = V_I(X_I, t)$ と表わされる。この場合変位勾配 $U_{I,J}$, $V_{I,J}$ は $J=1$ 以外の場合はゼロになるので $m_I = U_{I,1}$, $n_I = V_{I,1}$ なる変数を定義する。この場合、弾性相のひずみ不変量 I_E, II_E, III_E と流体相のひずみ不変量 I_f, II_f, III_f は

$$I_E = m_1 + \frac{1}{2}m_1^2 + \frac{1}{2}m_2^2 + \frac{1}{2}m_3^2, \quad II_E = -\frac{1}{4}(m_2^2 + m_3^2), \quad III_E = 0, \quad I_f = n_1 + \frac{1}{2}n_1^2, \quad II_f = 0, \quad III_f = 0 \quad (3)$$

と表わされるから、ひずみエネルギーは $W = W(I_E, II_E, III_E, I_f, II_f, III_f) = W(m_1, m_2^2 + m_3^2, n_1)$ と表わされる。 $J=2, 3$ に対し $\partial W/\partial m_J = 2m_J \partial W/\partial(m_2^2 + m_3^2)$ であるから $m_2 = m_3 = 0$ ならば $\partial W/\partial m_2 = \partial W/\partial m_3 = 0$ となり $U_2 = U_3 = 0$, $V_2 = V_3 = 0$ は式(1)を満たすことになる。この場合方程式は体積変化のみを考えたものとなり式(1)は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} A_{11} m_{1,1} + B_{11} n_{1,1} - \bar{\beta}_1 - \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} \right) \dot{\eta}_1 &= 0, \quad C_{11} m_{1,1} + D_{11} n_{1,1} - \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}} \right) \dot{\xi}_1 - \dot{\eta}_1 = 0 \\ \bar{\beta}_{1,1} - \dot{m}_1 &= 0, \quad \eta_{1,1} - \dot{n}_1 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ただし、 $\bar{\beta}_1 = \dot{U}_1$, $\eta_1 = \dot{V}_1$ であり、 $A_{11}, B_{11}, C_{11}, D_{11}$ は次式で与えられる。

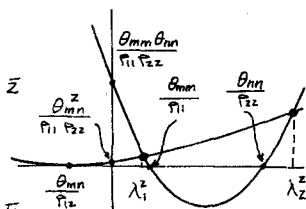
$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \theta_{mm}/f_{11}, \quad B_{11} = \theta_{mn}/f_{11}, \quad C_{11} = \theta_{mn}/f_{22}, \quad D_{11} = \theta_{nn}/f_{22} \\ \theta_{mm} &= \partial^2 W / \partial m_i^2, \quad \theta_{mn} = \partial^2 W / \partial n_i \partial m_i, \quad \theta_{nn} = \partial^2 W / \partial n_i^2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式(4)の特性曲線の勾配(圧縮波の伝播速度に相当)を λ とすれば, 次式で与えられる。

$$\left(\lambda^2 - \frac{\theta_{mm}}{f_{11}} \right) \left(\lambda^2 - \frac{\theta_{nn}}{f_{22}} \right) - \frac{f_{12}^2}{f_{11} f_{22}} \left(\lambda^2 - \frac{\theta_{mn}}{f_{12}} \right)^2 = 0 \quad (6)$$

右図と式(2)から, 式(6)が正の2実根をもつための条件は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \theta_{mm} > 0, \quad \theta_{nn} > 0 \\ \theta_{mm} \theta_{nn} - \theta_{mn}^2 > 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$



以上のことから水で飽和された非線形多孔質弾性体中を伝播する圧縮波には, ひずみの適当な条件下で, 2つの波が存在することになる。これは Biot が線形理論で求めた結果²⁾をも包含する関係式である。

2. 圧縮波の伝播速度に関する考察

式(6)の一般的傾向を知るために, ひずみエネルギーを m_i, n_i で3次の項までテーラー展開しこれによって起る非線形性について考察する。 $\theta_{mm}, \theta_{mn}, \theta_{nn}$ は W を m_i, n_i で2階微分したものであるから, おのおのの近似値としては m_i, n_i の1次の本項までで十分である。

$$\left. \begin{aligned} \theta_{mm} &= (\lambda + 2\mu) + \{3(\lambda + 2\mu) + 6\ell\} m_i + (R + 2f_2) n_i + \dots \\ \theta_{mn} &= R + (R + 2f_2) m_i + (R + 2f_3) n_i + \dots, \quad \theta_{nn} = Q + (3Q + 6L) n_i + (R + 2f_3) m_i + \dots \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

==, λ, μ, ℓ : 弾性相の弾性係数, Q, L : 流体相の弾性係数, R, f_2, f_3 : 弾性相と流体相のひずみの coupling を表わす定数である。式(8)を式(6)に代入し λ について解くと次式

$$\lambda_1^2 = p_1^2 + q_1^2 m_i + r_1^2 n_i + \dots, \quad \lambda_2^2 = p_2^2 + q_2^2 m_i + r_2^2 n_i + \dots \quad (9)$$

をうる。==に p_i, q_i, r_i ($i=1, 2$)は式(8)に現われる各係数の複合された関数である。式(9)は流体相あるいは弾性相内を伝播する圧縮波の伝播速度をひずみの関数として表示したものである。式(9)で $m_i, n_i \rightarrow 0$ とすれば $\lambda_1^2 = p_1^2, \lambda_2^2 = p_2^2$ となり微小ひずみ理論の解析結果より p_1 は流体相を伝播する, p_2 は弾性相を伝播する圧縮波の伝播速度であることがわかってゐるから, 非線形波動においても λ_1 が流体相を, λ_2 が弾性相を伝播する圧縮波の伝播速度と考えることができる。なお流体相のひずみと弾性相のひずみは独立に存在できません。 m_i と n_i の間には特性曲線に沿って次式が成立する。

$$\frac{dm_i}{dn_i} = \frac{D_i - \lambda_i^2}{C_i - \lambda_i^2 \left(\frac{f_{12}}{f_{22}} \right)} = \frac{P_i + S_i n_i + T_i m_i}{A_i + B_i n_i + C_i m_i} \quad (i=1, 2) \quad (10)$$

==に, $A_i, B_i, C_i, P_i, S_i, T_i$ は f_{11}, f_{12}, f_{22} にさへ式(8)に現われる各係数の複合された関数である。式(10)は同次形の微分方程式で積分可能である。==から求まる m_i と n_i の関係式を式(9)に代入すれば伝播速度が弾性相あるいは流体相のみのひずみによって表示できることになる。なお式(7)の条件が成立するとき, 式(4)は Totally hyperbolic となり, 特性曲線は直線となるから境界条件として流体相あるいは弾性相のひずみが与えられれば, 式(9)を用いて X_i-t 平面内の変位が決定できる。以上はひずみの1次近似のもとで圧縮波の伝播速度を表示したが, もっと高次の場合にも同様の考察を行なうことが出来る。

1) 後藤・土岐・佐藤, 防災研究年報 1971(投稿中), 2) M.A. Biot, J. Acous. Soc. Amer., vol. 28, No. 2, p468, 1956