I-50

スプリットおよびリング＝テスト供試体の応力分布におよぼすカップルストレスの影響

京都大学工学部　正員　丹羽義次
京都大学工学部　正員　小林昭一
京都大学大学院　学生員　○福井卓雄

岩，コンクリートなどの引張強度試験として行なわれている，スプリットおよびリングテスト供試体内部の応力分布におよぼすカップルストレスの影響を論ずる。

材料の強度試験を行なう場合には，載荷時における供試体内部の応力分布を知ることが基本的である。スプリットおよびリング＝テスト供試体の応力分布について，古典弾性論にもとづく解析がなされている。良く知られているように，古典弾性論もしくは一般的に古典連続体理論では材料は微小体積要素に至るまで均質であると仮定している。すなわち体積要素をある点のまわりに無限に小さくしていくとき，密度が一定のままで保たれると仮定している。岩，コンクリートなどの構造性の材料ではこの仮定は成り立たない。体積要素をある大きさより小さくしていくと，内部の不均一さによって密度は激しく振動する値をとるだろう。このような材料では内部の構造性を巨視的な意味でも何らかの形で取り入れることが必要になるだろう。とくに，材料内部の不均一さの平均的長さ，たとえば，構成粒子の大きさとか粒子相互間の平均的距離，が問題とされる状態の長さに比較できるようなときには，このような材料の構造性は無視できない影響を持つであろう。

材料の不均一性まで考慮に入れて一般化された連続体理論として，カップルストレス理論，micromorphic 理論がある。Eringen, Cowin によれば，カップルストレス理論は micromorphic 理論の極限であり，さらに古典弾性論はカップルストレス理論の極限である。材料内部の構成粒子の回転に対する自由度は，micromorphic 理論，カップルストレス理論古典弾性論の順に減少する。

ここでは，カップルストレス弾性論に基づいてスプリットおよびリング＝テスト供試体の応力解析を行なう。

Mindlin によれば，平面歪のとき，応力は2つのポテンシャル関数 ϕ, ψ によって表わされる。

(1)　$$\tau^{\alpha\beta} = \varepsilon^{3\alpha\gamma}\varepsilon^{3\beta\delta}\phi|_{\gamma\delta} + \varepsilon^{3\gamma\alpha}\psi|_{\gamma}^{\beta}, \quad \mu_{3\alpha} = \psi|_{\alpha}$$

ここに，$\tau^{\alpha\beta}$，$\mu_{3\alpha}$ は Cauchy 応力およびカップルストレス，$\varepsilon^{3\alpha\gamma}$；交代テンソル，$\phi|_{\alpha}$，$\psi|^{\beta}$ は共変微分および反変微分を表わす。
ポテンシャル関数 ϕ，ψ は釣合条件，適合条件より次の方程式を満足せねばならない。

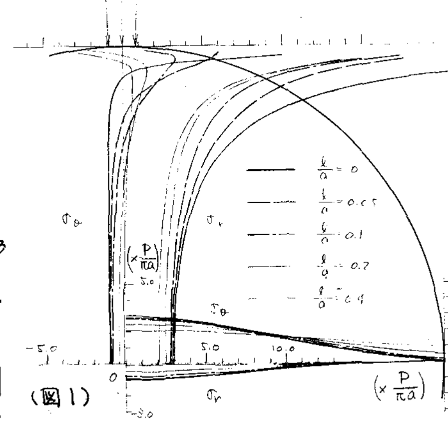
(2)　$$\nabla^4\phi = 0, \quad (1-l^2\nabla^2)\nabla^2\psi = 0$$

(3)　$$(1-l^2\nabla^2)\psi|_{\alpha} = -2(1-\nu)\,l^2\,\varepsilon_{3\alpha\beta}\,g^{\beta\gamma}\,\nabla^2\phi|_{\gamma}$$

ここに， $g^{\alpha\beta}$ は計量テンソル， $\nabla^2\phi = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{g}\,g^{\alpha\beta}\frac{\partial\phi}{\partial x^\beta}\right)$， $g=\det|g_{\alpha\beta}|$

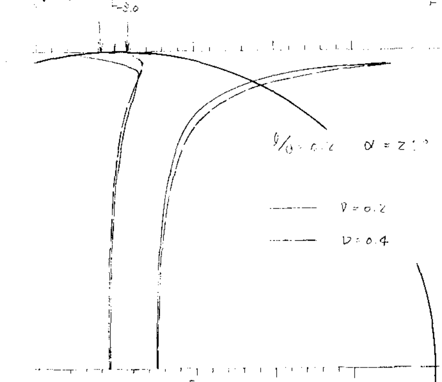
式(2)$_1$は古典弾性論のAiryの応力関数の満足すべき方程式と同じである。実際，式(2),(3)の方程式系において，$l=0$と置けばψは意味をもたなくなり，古典弾性論に対する方程式と同じになる。lは材料の曲げ剛性に関するパラメーターであり，長さの次元を持つ。たとえば，大理石のような構成粒子が密につまった構造を持つ材料では，lは平均粒径のほぼ2/3くらいの大きさを持つと言われている。しかし，lの測定についての実験的な確証はいまだほとんどない。

方程式系(2),(3)を満足するϕ，ψを求め，適当な境界条件のもとに未定の係数を決定すれば，応力分布が得られる。例として，スプリット＝テスト供試体の応力分布を（図1），(図2)に示す。



（図1）

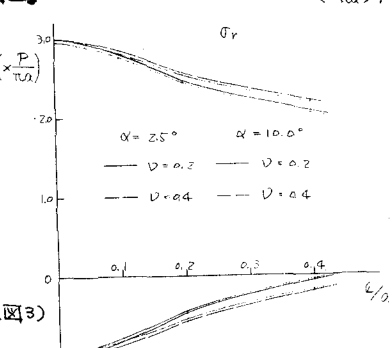
（図1）は応力分布におよぼす材料定数lの影響を表わす。lが大きくなる程，荷重載荷面上の応力は絶対値が減少し，これに垂直な面上の応力は平均化される。$l/a=0.2$のとき，中心付近では，引張応力は古典弾性論による値の約50%，圧縮応力は約80%になる。



（図2）

（図2）は$l/a=0.2$のときの，応力分布におよぼすポアソン比の影響を表わす。式(3)からも知られるように，カップルストレス理論では，$l=0$でないときには，応力分布にポアソン比の影響が表われる。一般にポアソン比が大きくなると，引張応力，圧縮応力ともに大きくなる。しかし，その影響はあまり大きくない。

（図3）は中心部の応力について，材料定数lとポアソン比の効果を示したものである。lの増大による応力の減少とポアソン比の効果が理解されよう。



（図3）

結論として，カップルストレス理論により導入される曲げ剛性定数lは応力分布に対して大きな効果をもつ。これらの結果は現在行なわれている引張強度試験に対して少なからぬ示唆を与えるであろう。

参考文献：Eringen, A.C.: Theory of Micropolar Elasticity, Chap.7 in FRACTURE II, H. Liebowitz (Ed.), pp.621-729, Academic Press (1968)