カップルストレスの応力集中におよぼす影響

京都大学工学部　正員　丹羽義次
京都大学工学部　正員　小林昭一
日本国有鉄道　正員　○森竹淳

1．はじめに

弾性学におけるカップルストレスの問題はここ十年間に急速に発展し，統一的な理論ができあがりつつある。　カップルストレスとは単位長さあるいは単位面積あたりの曲げモーメントであり，従来の弾性学（以下これを古典弾性学と呼ぶ）では高次の項として無視されているのは周知のことである。　すなわち，古典弾性学は連続でかつあくまでも均質な材料という数学的モデルに立脚している。　しかしながら，今，連続であってもある程度微視的にみて均質性の仮定を満足しない材料を想定すれば，カップルストレスを無視することは許されないであろう。　換言すると，カップルストレスを付け加えて考えることで，対象とする材料の結晶，粒状などの組織構造の影響を平均的にではあるが表わしうることになるのである。　したがって，応力集中や特異点近傍の挙動に極めて興味深い結果をもたらす。　こうした内部の組織構造までも考慮して取扱う一般連続体力学はその数学的モデルの差異により多岐にわたるが，ここでは Toupin，Mindlin & Tiersten に代表される Couple stress 理論と Neuber による Micropolar 理論を取扱い，2，3の問題について，各理論の比較とカップルストレスの効果を考察する。問題はすべて平面歪とする。
イ）単純引張場内の円孔，　ロ）単純引張場内のライニングを有する円孔，
ハ）剛体圧盤による圧縮供試体，　ハ）インデンテーションによる供試体。

2、基礎方程式

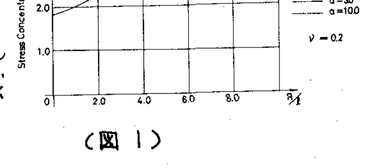
カップルストレスは通常の応力が歪に対応するように曲率，すなわち回転の勾配に対応し，新たな弾性定数（曲げ，ねじり定数）が必要になってくる。　この曲げ，ねじり定数とせん断弾性定数との比は長さの2乗の dimension をもち，材料特有の定数である。以下，これを平方根を ℓ とし，ℓ をパラメーターとしてカップルストレスの効果を議論する。　種々の方程式に関しては文献[1),2)]を参照されたい。　古典弾性学と同様の方法により次の式を満足する2つのポテンシャル関数を用いると

$$\nabla^4\phi=0,\quad \nabla^2(1-\ell^2\nabla^2)\psi=0,\quad (1-\ell^2\nabla^2)\psi|_\alpha=-2(1-\nu)\ell^2\epsilon_{3\alpha\beta}g^{\beta\gamma}\nabla^2\phi|_\gamma \qquad (1)$$

応力成分は次のようになる

$$\tau^{\alpha\beta}=\epsilon^{3\alpha\gamma}\epsilon^{3\beta\delta}\phi|_{\gamma\delta}+\epsilon^{3\nu\alpha}\psi|^{\beta}_{\nu},\quad \mu_{3\alpha}=\psi|_\alpha \qquad (2)$$

ただし，これらは Couple stress 理論に従うものであり平面歪状態を表わす。　μ はカップルストレスであり，$|$ は covariant derivative である。　(1)，式は古典弾性学における周知の Airy 応力関数であるが，ψ が新たに付け加えられ，カップルストレスの存在のために応力の対称性は成り立たなくなる。　実際の問題の適用にあたっては (1)式を



（図 1）

満足する適当な解を用いて
適当な境界条件のもとに
解くことに帰着する。

3、結果および考察

① Micropolar理論ではカップルストレスの効果は l, a, ν によって表わされるが，一定の l に対し a の任意の値により，古典弾性学とCouple stress理論の間の任意の値をとる。$a=0$ で古典弾性学と一致し，$a=\infty$ でCouple stress理論と一致する。 したがって，以下の議論はすべてCouple stress理論と古典弾性学とについて行なう。

② l, ν が小さくなる程，古典弾性学と一致する傾向にあり，極限で $l=0$ のときは完全に一致する。(図1)

③ イ), ハ), ニ) については l が大きくなる程，応力分布は極めて平均化してくるが，ロ)に関してはライニングとその周辺との相対的剛性に影響される。この場合，ライニングがその周辺に比べて剛になればなる程 応力集中は大きくなる。(図2)

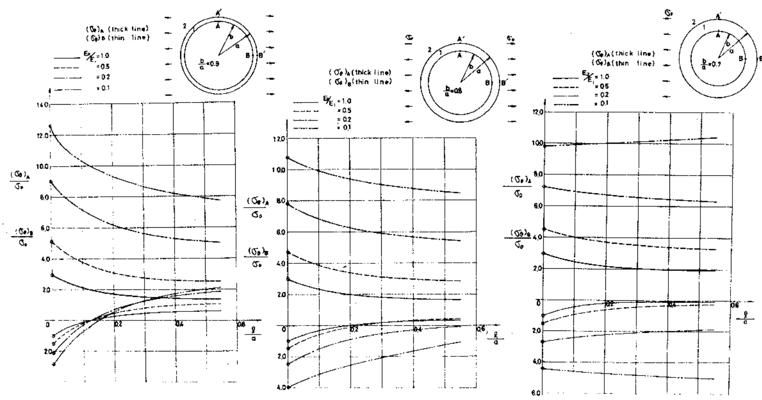
④ 上述のように多くの問題に対しては，カップルストレスの存在により応力集中は緩和のある傾向を示す。すべての問題に対して同様の結果をもたらすものではない。ある点の応力に影響をおよぼすのは，その点近傍のカップルストレスの符号，ならびにその勾配であることは明らかである。したがって，たとえカップルストレスがかなりの大きさで存在しても，その点近傍での勾配が0であるときは，他の応力成分に関して見掛け上，古典弾性学との差異はないように見える。一般に，ある点の応力状態に関しては次のことが言える。s に平行な面に作用するカップルストレスを μ とすると，s に垂直な面に作用する直応力 σ は

$\partial\mu/\partial s > 0$ ならば $\sigma < \sigma^*$ (classical)

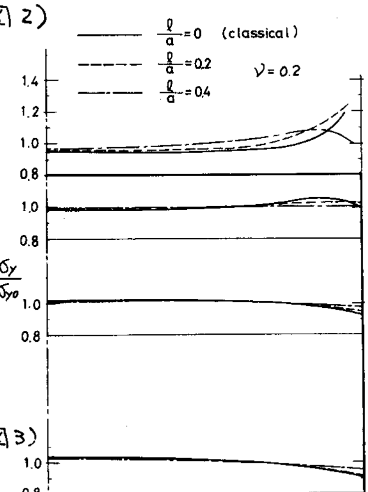
$\partial\mu/\partial s = 0$ 〃 $\sigma = \sigma^*$

$\partial\mu/\partial s < 0$ 〃 $\sigma > \sigma^*$

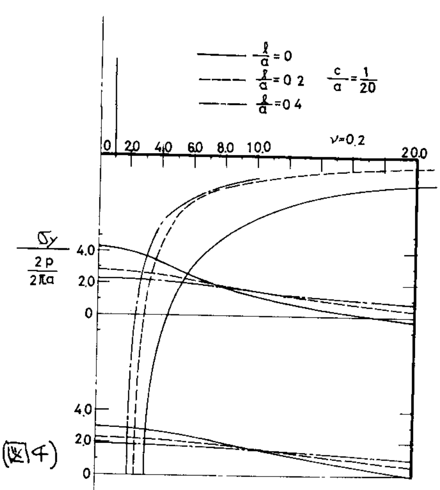
せん断力に対しても類似の式が得られる。



(図2)



(図3)



(図4)

文献 1). R.D.Mindlin & H.F.Tirsten
Arch. Rat. Mech. Anal. vol.11 (1962) pp.415-446

2). H.Neuber ; Proc. 11th Inter. Congr. Appl. Mech. pp.153-158, Springer (1966)