衝撃を受けるバイ・リニアー弾性梁の過渡応力状態について

京都大学　工学部　正員　丹羽義次
京都大学　工学部　正員　小林昭一
京都大学大学院　学生員　○松本忠章

1. まえがき

衝撃を受けた梁の挙動に関しては、従来から、１次元的な振動としてBernoulli-Euler Beamや、Timoschenko Beamなどのモデルを用いて解析されてきた。そして、さらに塑性梁のような非弾性のモデルも考えられている。

しかしながら、実際の現象は多次元的であり、厳密にはいわゆる応力波伝播の問題として取り扱うことが望まれるのであるが、この場合、一般に微分方程式の厳密解を求めることは難しく、材料が非弾性の場合はさらに複雑となって、厳密解を求めることはほとんど不可能である。

昨年の学会において横田氏より、差分法を用いて、単純梁に横衝撃が加わった場合の過渡応力状態を、直接数値的に求める方法が発表されているが、この研究では、さらに降伏条件を導入して、材料がBi-linearな弾性挙動、ならびに履歴をも示すような場合についての解析を行った。

2. 解析方法

非弾性の場合には、一般に、応力と歪もしくは変位の間には１対１の対応がない。そこで微小な時間増分（Δt）における応力や変位の増分によって計算が行われる。

物体力を無視した２次元問題（平面歪）の場合、一様な弾性体の運動方程式は、変位増分で表わしても、変位の場合とまったく同様の形となり、次の式で表わされる。

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\dot{\mathbf{u}} = (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\dot{\mathbf{u}} + \mu\nabla^2\dot{\mathbf{u}} \qquad \text{------------(1)}$$

ここに、$\dot{\mathbf{u}}$は変位増分ベクトル、λ, μはLaméの定数、ρは密度である。

微分商を中央差分で正確度が２であるような差分商におきかえると(1)式は次のようになる。

$$\left\{\begin{aligned}
&\dot{u}_{i,j,k+1} - 2\dot{u}_{i,j,k} + \dot{u}_{i,j,k-1} = C_1^2\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2(\dot{u}_{i+1,j,k} - 2\dot{u}_{i,j,k} + \dot{u}_{i-1,j,k}) \\
&\qquad + (C_1^2 - C_2^2)\frac{\Delta t^2}{4\Delta x\cdot\Delta y}(\dot{v}_{i+1,j+1,k} - \dot{v}_{i+1,j-1,k} - \dot{v}_{i-1,j+1,k} + \dot{v}_{i-1,j-1,k}) + C_2^2\left(\frac{\Delta t}{\Delta y}\right)^2(\dot{u}_{i,j+1,k} - 2\dot{u}_{i,j,k} + \dot{u}_{i,j-1,k}) \\
&\dot{v}_{i,j,k+1} - 2\dot{v}_{i,j,k} + 2\dot{v}_{i,j,k-1} = C_1^2\left(\frac{\Delta t}{\Delta y}\right)^2(\dot{v}_{i,j+1,k} - 2\dot{v}_{i,j,k} + \dot{v}_{i,j-1,k}) \\
&\qquad + (C_1^2 - C_2^2)\frac{\Delta t^2}{4\Delta x\Delta y}(\dot{u}_{i+1,j+1,k} - \dot{u}_{i+1,j-1,k} - \dot{u}_{i-1,j+1,k} + \dot{u}_{i-1,j-1,k}) + C_2^2\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2(\dot{v}_{i+1,j,k} - 2\dot{v}_{i,j,k} + \dot{v}_{i-1,j,k})
\end{aligned}\right. \qquad \text{-----------(2)}$$

ここに$\Delta t, \Delta x, \Delta y$はそれぞれ$t, x, y$軸方向の増分、$C_1, C_2$はそれぞれ縦波、横波の速さ、$\dot{u}_{i,j,k+1}$は$t=k\Delta t$から$t=(k+1)\Delta t$の間の、点$(i\Delta x, j\Delta y)$における$x$方向の変位増分、$\dot{v}_{i,j,k+1}$は同様の$y$方向の変位増分である。

降伏条件としては、von Misesの降伏条件を２次元の場合に書き表わして、

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 < k \qquad \text{-----------(3)}$$

を用いる。kはBi-linearな弾性の場合には材料の単純せん断強度であり、さらに履歴を考える時は、左辺の値がkを越えた場合、kがその受けた履歴中で最大の応力状態に等しく

なるようにする。そして、これを境として弾性定数を変える。

微分方程式を差分法で解く場合には、その解がもとの微分方程式の解に収束するかどうかという、いわゆる解の安定性が問題となる。そこで(2)式の差分方程式にLax, Richtmyerの安定性の理論を適用して安定条件を求めると、$\Delta x=\Delta y$の場合、

$$\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 < \frac{1}{C_1^2+C_2^2} \quad \text{------------}(4)$$

である。

3．数値計算例

数値計算に必要な諸定数は、模型実験との対応を考えて基本的にアラルダイトBのものを用い、$\rho=1.27\ \mathrm{g/cm^3}$であり、弾性定数は、状態I：$E_1=32000\ \mathrm{kg/cm^2}$, $\nu_1=0.36$（$C_1=2040\ \mathrm{m/sec}$, $C_2=950\ \mathrm{m/sec}$）、状態II：$E_2=3200\ \mathrm{kg/cm^2}$, $\nu_2=0.45$（$C_1'=970\ \mathrm{m/sec}$, $C_2'=290\ \mathrm{m/sec}$）とし、(4)式の安定条件より$\Delta x=\Delta y=1\ \mathrm{cm}$として、$\Delta t=2\times10^{-6}\ \mathrm{sec}$で計算した。

梁のスパン長lが、高さhの4倍である単純梁の中央に、図-1に示すような衝撃力が作用する場合を考える。$h=0.1\times p$とし、履歴も考慮して計算した時の降伏領域の推移の様子を表わしたのが図-2である。また、この場合の応力分布を完全弾性の場合と比較したものが図-3(a)～(c)であり、(a)は図-2と対照して各時刻における中央断面の鉛直応力(σ_y)の分布を比較したものである。(b), (c)はそれぞれの場合について、荷重最大時の主応力状態を示している。

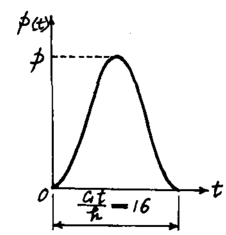

図-1 衝撃荷重

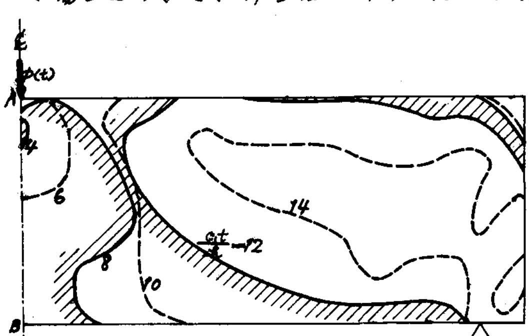

図-2 降伏領域の推移

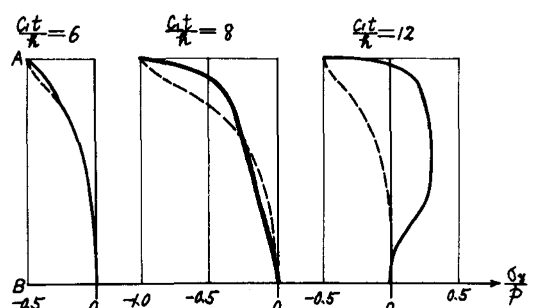

図-3 (a) 中央断面のσ_yの分布 ──── Bi-linear履歴型 ‐‐‐‐ 完全弾性

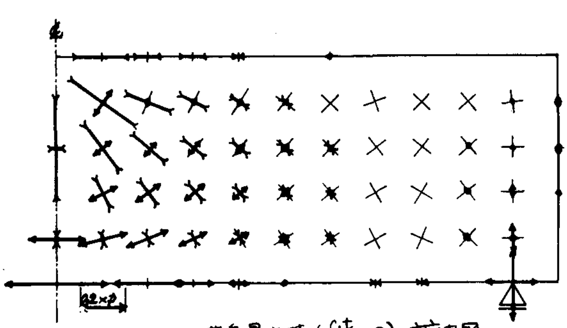

図-3 (b) 荷重最大時（$\frac{C_1t}{h}=8$）の主応力図
（完全弾性）

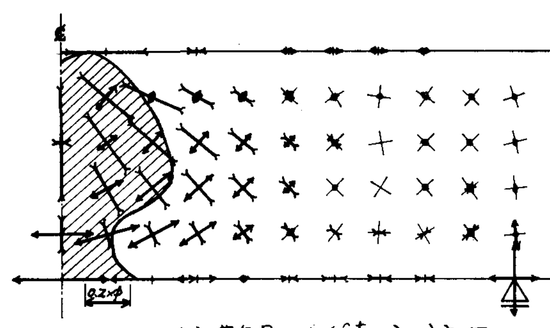

図-3 (c) 荷重最大時（$\frac{C_1t}{h}=8$）の主応力図
（Bi-linear履歴型）