構造特性を有する材料の一モデル化について

京都大学　工学部　正員　丹羽義次
京都大学　工学部　正員　小林昭一
京都大学　大学院　学生員○前田　武

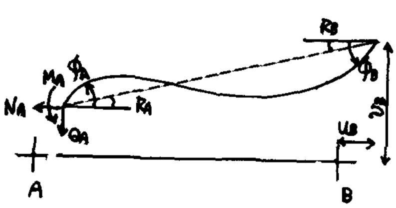
1．まえがき

弾性学における物質は、いわゆる連続体としてモデル化されている。つまり、どんなに小さくみても、すきまなく連続していると仮定され解析的すなわち微分方程式による取扱いを可能にしている．そこで、もし他の方法で問題を解こうとする場合には"非連続"なモデルを採用した方が有利になることがある．本研究では固体材料を格子構造でおきかえ、各種の問題に対する適用方法を示した．

格子構造モデルの特長として　1）軸力、せん断力および曲げモーメントを考慮した最も一般的な線型モデルである．2）格点間の変位と部材力の関係が材料力学の知識で容易に求められる．3）矩形格子の他に六角形、三角形格子の採用あるいは各係数を変化させることによって構造としての特性が変換される．4）静的問題はもとより振動，波動などの動的問題にも適用され、その応用範囲が極めて広い．ということがあげられる．

また、その他に従来の弾性学の境界値問題、初期値問題は、その殆んどが差分による近似計算で扱われているが、そこには連続体から非連続体への転換がみられる。微分演算がもともと差分の極限として定義されたことを考えあわせると、差分形式に積極的に物理的意味を加味した非連続なモデルである格子構造は、じゅうぶんな存在理由をもっているといえる．

2．解析方法



格点の近傍を取り出して、つりあい式をたてる．それを変位で表現すると次のようになる．

$$
\left.
\begin{aligned}
&P_x(u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}) \\
&+ Q_y(u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}) \\
&+ R_y(\phi_{m,n+1} - \phi_{m,n-1}) = 0 \\[1em]
&R_y(v_{m,n+1} - 2v_{m,n} + v_{m,n-1}) + Q_y(v_{m+1,n} - 2v_{m,n} + v_{m-1,n}) \\
&- R_x(\phi_{m+1,n} - \phi_{m-1,n}) = 0 \\[1em]
&- R_y(u_{m,n+1} - u_{m,n-1}) - T_y(\phi_{m,n+1} + 4\phi_{m,n} + \phi_{m,n-1}) \\
&+ R_x(v_{m+1,n} - v_{m-1,n}) - T_x(\phi_{m+1,n} + 4\phi_{m,n} + \phi_{m-1,n}) = 0
\end{aligned}
\right\} \quad (1)
$$

ここに，$P = EA/\ell$，$Q = 12EI/\ell^3$，$R = 6EI/\ell^2$，$T = 2EI/\ell$　である．動的な問題では右

辺を慣性項にすればよい．従来の連続体と比較するために、(1)式を微分－差分変換式により微分方程式化すると以下の式が導入される．

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \\ &k^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - k^2\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \\ &\phi - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\ell^2}{12}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

kは格子の部材の厚さと長さの比である．$k = 1$の場合にはPoisson比$\nu = 0$のNavierの方程式に一致する．

境界条件としては 1）固定端，2）自由端 3）荷重点 4）対称面 5）無限延長などがあるが、それらの処理には2種類あって、ひとつは架空の格点を設けてその変位でそれぞれの条件をみたす方法であり，他のひとつは個々の条件にあったつりあい式をたてる方法である．前者は計算上、簡便になり、後者は厳密という特徴をもっている．

連立方程式の解法はRelaxation Methodによったが、加速係数や境界条件の処理の仕方など解の収束，発散にはじゅうぶんな注意が必要である．

3．解析例

静的な問題として弾性学でBoussinesqの解として知られている応力集中問題を解析した．Fig-2は格子構造モデルによる解とCouple Stressを考慮した弾性解を比較したものであるが、かなりの精度で近似されていることがわかる。境界条件は本来、無限延長である。しかし、たて，横の格点の数を10個以上とれば境界が自由端であっても固定端であっても荷重点付近の変位は、ほとんど同じになるので左右あるいは底面の境界条件による影響は本質的でない。同じ問題を六角形，三角形格子を用いて解析したが、とくに六角形格子では変位の伝播が四方に広がって興味ある形状を示した．

動的問題は地盤を考慮したせん断波（地震波）に対する建物の応答を解析している．

$$\left\{\begin{aligned} &E = 2.1\times10^6\ kg/cm^2 \\ &\ell = 1.0\ m \\ &A = 1.0\ m^2 \\ &T/Q = \tfrac{1}{6} \end{aligned}\right.$$

● --- 材料定数 $\ell = 0.2$ を用いた弾性解

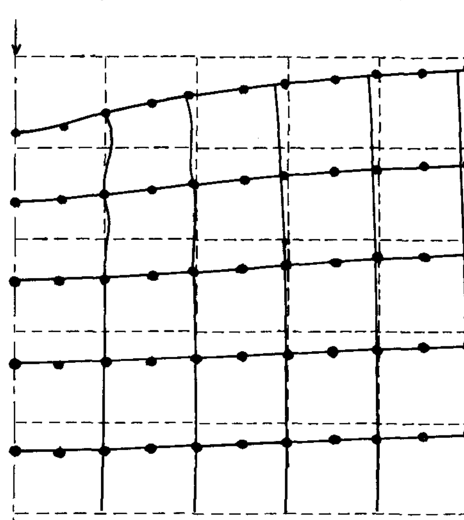


Fig-2